Elementar-Unterricht

im

Linear-Zeichnen

für

Kunst- und technische Schulen, sowie zum Selbststudium für zeichnende Künstler und Techniker, angehende Maler und Architekten 2c.

von

Heinrich Weishaupt,

königl. Professor und techn. Vorstand sämmtlicher städtischen feier- und werktägigen Zeichnungsschulen Münchens.

IV. Abtheilung.

Die Lehre der Parallel- und Central-Projektion.

I. Theil: Axonometrie.

II. Theil: Perspective.

Mit 102 in den Text eingedruckten Holzschnitten und 30 Tafeln.

München, 1868.

Carl Merhoff's Verlag.

Axonometrie.

Elementar-Unterricht

im

Linear-Zeichnen

für

technische Schulen und zum Selbstunterrichte

von

Heinrich Weishaupt,

königl. Professor und techn. Vorstand sämmtlicher städtischen feier- und werktägigen Zeichnungsschulen Münchens.

I. Theil der IV. Abtheilung.

Axonometrische Projektionslehre.

München, 1868.

Carl Merhoff's Verlag.

Die Lehre
der
Parallel- und Central-Projektion.

I. Theil.

Die Axonometrie oder Parallel-Perspektive des Technikers

mit Entwickelung des Prinzipes der verschiedenen Parallelprojektions-Methoden nebst der axonometrischen Schattenconstruktion

für

Gewerbs- und Militärschulen, sowie zum Selbststudium für zeichnende Künstler und Techniker

bearbeitet

von

Heinrich Weishaupt,
königl. Professor und techn. Vorstand sämmtlicher städtischen feier- und werktägigen Zeichnungsschulen Münchens.

Mit 50 in den Text eingedruckten Holzschnitten und 6 Tafeln.

München, 1868.
Carl Merhoff's Verlag.

Seiner Hochwohlgeboren

Herrn

Julius Schnorr von Carolsfeld

Mitglied des akademischen Rathes und Direktor der
königlichen Gemälde-Galerie zu Dresden

widmet

diese Abhandlung

hochachtungsvollst und dankbarst

sein ehemaliger Schüler

Heinrich Weishaupt.

Vorwort.

Die IV. Abtheilung dieses Linearzeichnungswerkes gliedert sich in zwei Theile, wovon der eine Theil die axonometrische Projektion oder die Parallel-Perspektive und der andere die malerische Linear-Perspektive umfaßt.

Wenn im Allgemeinen die in der II. Abtheilung dieses Linearzeichnungswerkes abgehandelte orthographische oder rechtwinkelige Projektion mit ihrem Grund- und Aufriß und ihrer Seitenansicht bei Arbeitszeichnungen des Technikers vorzugsweise Anwendung findet; so hat dagegen die schiefwinkelige und axonometrische Projektion nicht minder große Vorzüge für viele Gegenstände der Technik, indem sie, die drei Raumgrößen des körperlichen Gegenstandes in einem Bilde vereinigend, einen leichteren Ueberblick gestattet als wie erstere, und es wird daher besonders die axonometrische Projektion, gleichsam als Perspektive des Technikers, in neuerer Zeit bei vielen Illustrationen technischer Werke benützt.

Es dürfte deßhalb das Studium derselben für den denkenden Zeichner und Techniker, sowie für die Schule nicht minder interessant, ja selbst nothwendig werden.

Bei Bearbeitung der vorliegenden axonometrischen Projektionslehre, von der Grundidee geleitet, dieselbe in

möglichsten Anschluß an die bisher allgemein bekannten Darstellungsmethoden zu bringen und so in rationeller Richtung der praktischen Anwendung zuzuführen, wurden daher auch die Hauptgesetze der Axonometrie auf graphischem Wege entwickelt und zugleich durch Aufstellung des allgemeinen Prinzipes der Parallel-Projektion die Theorie der graphischen Construktion der verschiedenen schiefwinkeligen Projektionen nachgewiesen und selbe mit der, der axonometrischen Projektion vergleichbar gemacht, wodurch das axonometrische Zeichnen nicht allein systematisch begründet, sondern auch dessen Durchführung mittelst der aus dieser constructiven Entwicklungsmethode hervorgehenden Maßstäbe wesentlich erleichtert ist.

So wurden auch stets die häufig bei technischen Gegenständen vorkommenden Körperformen und Körperverbindungen als Aufgaben gewählt, und die axonometrisch zu zeichnenden Gegenstände entweder durch Maße bestimmt oder deren Grundriß u. s. w., sowie deren Lage zu den Coordinaten-Ebenen gegeben. Ebenso wurde in entsprechender Weise die axonometrische Schatten-Construktion behandelt.

Möchte nun auch dieser axonometrischen Zeichnenlehre eine gleich freundliche Aufnahme wie den vorhergehenden Abtheilungen meines Linearzeichnens zu Theil werden, und möchte dieselbe Einiges zur weiteren Verbreitung und Anwendung dieser Zeichnenmethode beitragen!

Inhalt.

I. Abschnitt.

Ueber die verschiedenen graphischen Darstellungsmethoden im Allgemeinen.

II. Abschnitt.

Constructiver Theil der Axonometrie.

*

III. Abschnitt.

I. Abschnitt.

Ueber die verschiedenen graphischen Darstellungsmethoden im Allgemeinen.

1) Unter graphischer Darstellung eines Gegenstandes der Natur oder Kunst verstehen wir das Bild desselben auf einer Fläche, und die zwei wesentlich verschiedenen Bedingungen, welche sich an diese Darstellung oder Zeichnung eines Gegenstandes knüpfen lassen, sind bekanntlich, daß entweder die Zeichnung in dem Auge des Beschauers dieselbe Wirkung hervorbringe, welche der Gegenstand selbst darin hervorbringen würde, oder daß man aus ihr die Maße des Gegenstandes in möglichst leichter Weise entnehmen kann.

Der ersten Bedingung entspricht die perspektivische oder Central-Projektion, der zweiten die geometrische oder Parallel-Projektion; diese verlangt mehrere, jedoch leicht herstellbare Ansichten, welche aber nur von dem mit dem Zeichnen Vertrauten verstanden werden können, jene dagegen erweckt durch eine, aber oft sehr umständlich herzustellende Ansicht auch bei dem Laien im Zeichnen eine Vorstellung des Gegenstandes.

An diese beiden Bedingungen, welche an die graphische Darstellung eines körperlichen Gegenstandes gestellt werden können, reiht sich noch eine dritte an, nämlich die, durch eine einzige Ansicht, welche uns einen bequemen Ueberblick des körperlichen Gegenstandes gewährt, sämmtliche drei Raumdimensionen eines Körpers zu vereinigen, wodurch ein schnelles Ein-

gehen in die Construktion desselben möglich ist und woraus zugleich die hauptsächlichsten Maße des Körpers zu entnehmen sind.

Dieser Bedingung wird die sogenannte schiefe und isometrische Projektion, so wie auch die aus letzterer hervorgegangene axonometrische Projektionsmethode genügen*).

Obgleich nun aber nicht jede dieser Projektionsmethoden, welche eigentlich bloß Abarten der Parallelprojektion sind, sich für alle darzustellenden Gegenstände gleich vortheilhaft eignet, so geben sie, passend gewählt, doch immer ein deutliches Bild des Gegenstandes, aus dem seine Maße sich entnehmen lassen, und vereinigen sonach die Vortheile der geometrischen und perspektivischen Projektion, weßhalb sie für die Herstellung perspektivisch ähnlicher Darstellungen zum Gebrauche des Technikers, viel anwendbarer sind, als wie die eigentliche perspektivische Projektionsmethode.

Perspektiv- oder Central-Projektion.

2) Ein materieller Körper wird entweder gedacht, und besteht in unserer Vorstellung, oder derselbe ist wirklich vorhanden und dann durch die uns angebornen Sinne wahrnehmbar, wo außer dem Tastsinn das Auge des Menschen das vorzüglichste Organ hiezu ist.

Was wir nun sehen nennen, ist jene Anregung (Afficirung) des Auges durch rückstrahlendes Licht, wodurch es das Dasein erleuchteter Gegenstände wahrnimmt. Jeder Punkt nämlich des vom Lichte erleuchteten Gegenstandes wirkt in sekundärem Verhältniß als ausstrahlend, d. i. er sendet ebenfalls nach allen Richtungen Lichtstrahlen aus, von denen einer doch unser Auge treffen muß, der dann das Bild des Punktes in dem Auge erzeugt, und das Zusammentreffen der unendlich vielen Punktbilder im Auge*) gibt das Gesammtbild des Gegenstandes.

*) Die schiefe so wie einige fingirte Projektionsmethoden wurden schon im vorigen Jahrhundert angewendet, während die isometrische Projektionsmethode von dem Engländer Prof. Farisch 1820 und die Axonometrie 1844 von Prof. Weisbach entwickelt wurde.

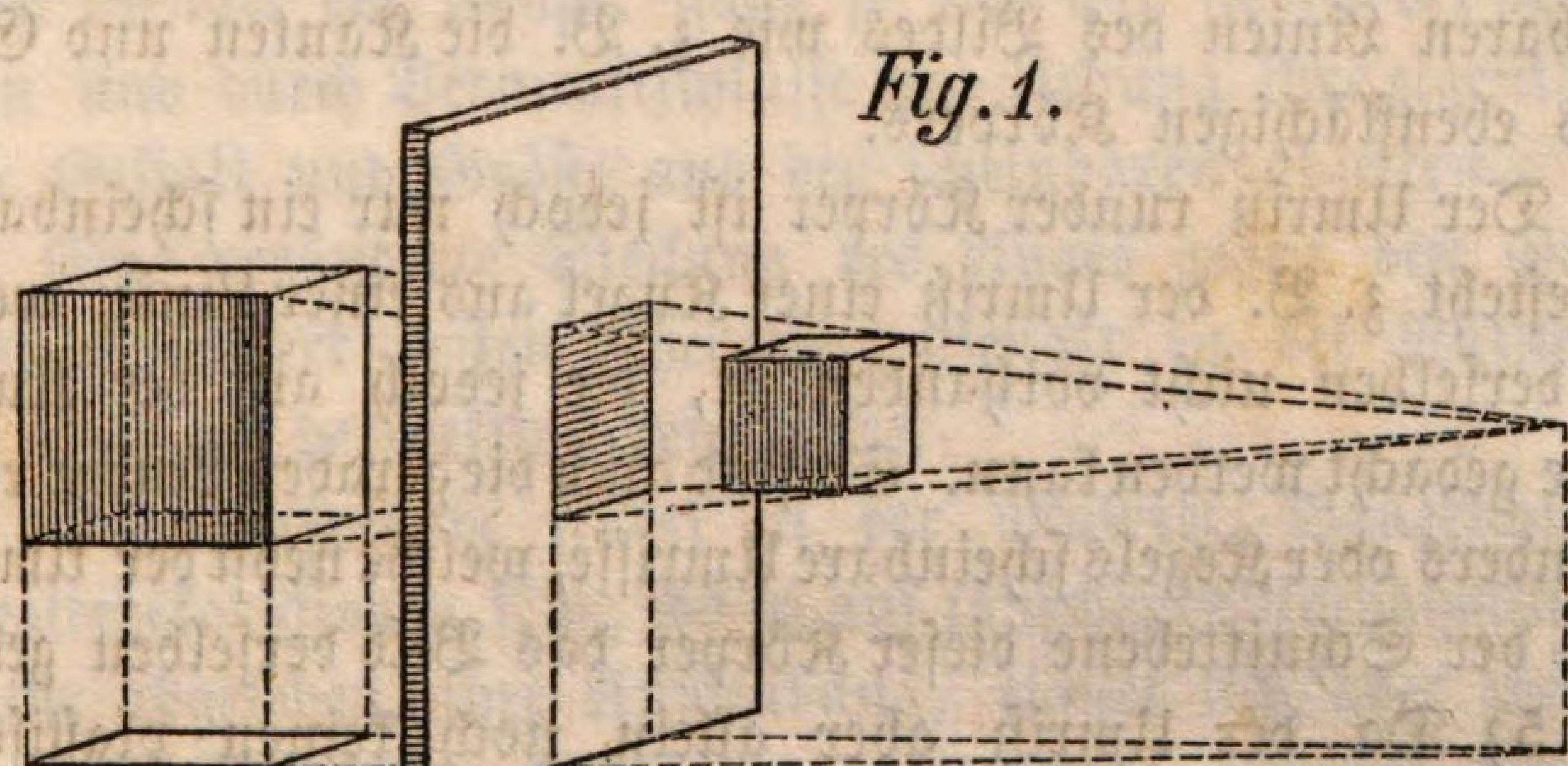
Diese materielle Auffassung des Sehens ist dem graphischen Construktions-Prinzipe entsprechend, nach welchem wir aus Punkten Linien und aus Linien Flächen und Körper bestimmen.

3) Denken wir uns irgend einen beleuchteten Gegenstand im Raume und nehmen an, daß das unbeweglich stehende Auge auf ihn gerichtet sei, und zwischen ihm und dem Gegenstande eine durchsichtige Ebene (z. B. Glastafel) sich befinde, so würde von jedem dem Auge zugewendeten Punkte des Gegenstandes ein Lichtstrahl dem Auge zugehen, welcher auf seinem geradlinigen Wege die durchsichtige Tafel durchdringt.

Könnte sich nun jeder dieser Durchdringungspunkte auf derselben fixiren, so würden sie zusammen ein Bild des Gegenstandes geben, wie es das Auge in der Natur sieht.

Hiebei wird das Bild kleiner als der Gegenstand, wenn dieser hinter der Tafel, größer aber, wenn derselbe zwischen der Tafel und dem Auge befindlich und im letzteren Falle sonach von der Verlängerung der Strahlen gebildet würde.

Fig. 1.



Diese hier angedeutete Vorstellungsweise (Glastafelperspektive genannt), welche sich der Wirklichkeit einfach und anschaulich anpaßt, kann allen graphischen Theorien untergelegt werden.

4) Aehnlich können wir uns die Entstehung des Bildes auch dadurch denken, daß eine unbiegsame aber bewegliche

---

*) Ueber den Bau des Auges, dessen Kenntniß mit der graphischen Ausführung innig zusammenhängt, werden Erläuterungen folgen.

Gerade, welche, ohne mit ihrem einen Ende den Punkt des Auges zu verlassen, die Kanten oder gebogenen Flächen des Gegenstandes berührt und hiedurch einen pyramidalen oder conischen Raum beschreibt, wo der Querschnitt, welcher durch die Bildfläche entsteht, als ebenes Bild des Gegenstandes betrachtet werden kann.

Graphische Darstellungen, deren Entstehung auf die beschriebenen Weisen abgeleitet werden kann, heißen Centralprojektionen, perspektivische Bilder, und die Lehre, dergleichen Bilder nach geometrischen Regeln zu entwerfen, nennt man Perspektive (Scenographie).

Diese Perspektive, aus der wir bloß den Umriß, nämlich die Begrenzungslinie der Gestalt eines Gegenstandes erhalten, wird auch Linearperspektive genannt.

Zu diesem Umrisse gehören aber nicht allein die Grenzlinien des Raumes, welchen das Bild eines körperlichen Gegenstandes auf der Bildfläche einnimmt, sondern auch alle sichtbaren Linien des Bildes wie z. B. die Kanten und Ecken eines ebenflächigen Körpers.

Der Umriß runder Körper ist jedoch nur ein scheinbarer; so besteht z. B. der Umriß einer Kugel aus einer Linie, welche auf derselben nicht vorhanden ist, die jedoch auf der Kugelfläche gedacht werden kann. So sind auch die geraden Linien eines Cylinders oder Kegels scheinbare Umrisse, welche nebst der Umrißlinie der Schnittebene dieser Körper das Bild derselben geben.

5) Da der Umriß aber allein noch keinen plastischen Eindruck, den Licht und Farbe hervorbringen, uns gibt, so schließt sich die Linearperspektive im engern Sinne an die aus der Physik gegriffenen Lehren von dem Lichte, Schatten und den Erscheinungen an, die aus dem Lichte hervorgehen, woraus eine neue Abzweigung, die Luftperspektive*) entspringt.

Die Linearperspektive bildet jedoch für sich den wichtigeren und mehr selbstständigen Theil, während letztere ganz ab-

*) Das Wesentlichste über Luftperspektive, nämlich über Licht und Schatten, enthält die III. Abtheilung dieses Werkes.

hängig von der ersteren, und auch nicht wohl denkbar ohne Vorhandensein des graphischen Bildes ist.

Die Linearperspektive kennt nur Formen, die Luftperspektive für sich bloß formlose Nebelbilder. Letztere, in dem unbegrenzten Lichtraume sich bewegend, wird erst in ihren Gesetzen erkennbar, indem sie sich der Formenwelt hingibt. Licht und Luft ist ihre Farbenquelle und Tonscala und wo ihr Pinsel nicht zureicht, hüllt die Natur sich in Schatten.

In dem Gegensatze von Licht und Schatten wird dem Auge erst das Plastische klar, und demselben das Hervortreten und Zurückweichen der einzelnen Theile wahrnehmbar, wodurch es den Begriff von Nähe und Ferne erhält.

Ja selbst bei den Gebilden der Parallel-Projektion wird durch Licht und Schatten ein leichteres Verständniß bewirkt und dieselben der Wahrheit näher gebracht.

6) Die perspektivischen Bilder haben nur subjektive Wahrheit, nämlich sie zeigen nur die scheinbare, nicht die wirkliche Gestalt der Dinge, ganz so wie wir sie in der Natur, sehen und durch Vernunftschlüsse und Uebung ihre eigenthümliche Gestalt und Größe aus der scheinbaren ableiten.

Eine veränderte Stellung des Auges gegen den Gegenstand verändert dessen scheinbare Gestalt in der Natur, so wie auch im perspektivischen Bilde.

Die Perspektive findet in der Malerei, Bauzeichnung, Theaterdekoration u. s. w., wo es auf täuschende Nachahmung der Natur abgesehen, ihre Anwendung, eignet sich aber weniger zum technischen Zwecke, indem aus ihren Bildern nur mit Schwierigkeit die Größenverhältnisse und wahre Gestaltung des Gegenstandes entnehmbar sind.

7) Für die Perspektive gibt zwar die Ebene in ihrer senkrechten Stellung die einfachste und auch die am Allgemeinsten in Anwendung kommende Bildfläche, obgleich diese Stellung der Ebene nicht unerläßliche Bedingung ist, und keineswegs jede andere wie immer entstandene Bildfläche hievon ausgeschlossen bleibt, indem z. B. gleich in der dekorativen und monumentalen Malerei gewölbte, gebrochene, cylindrische und geneigte Flächen vorkommen.

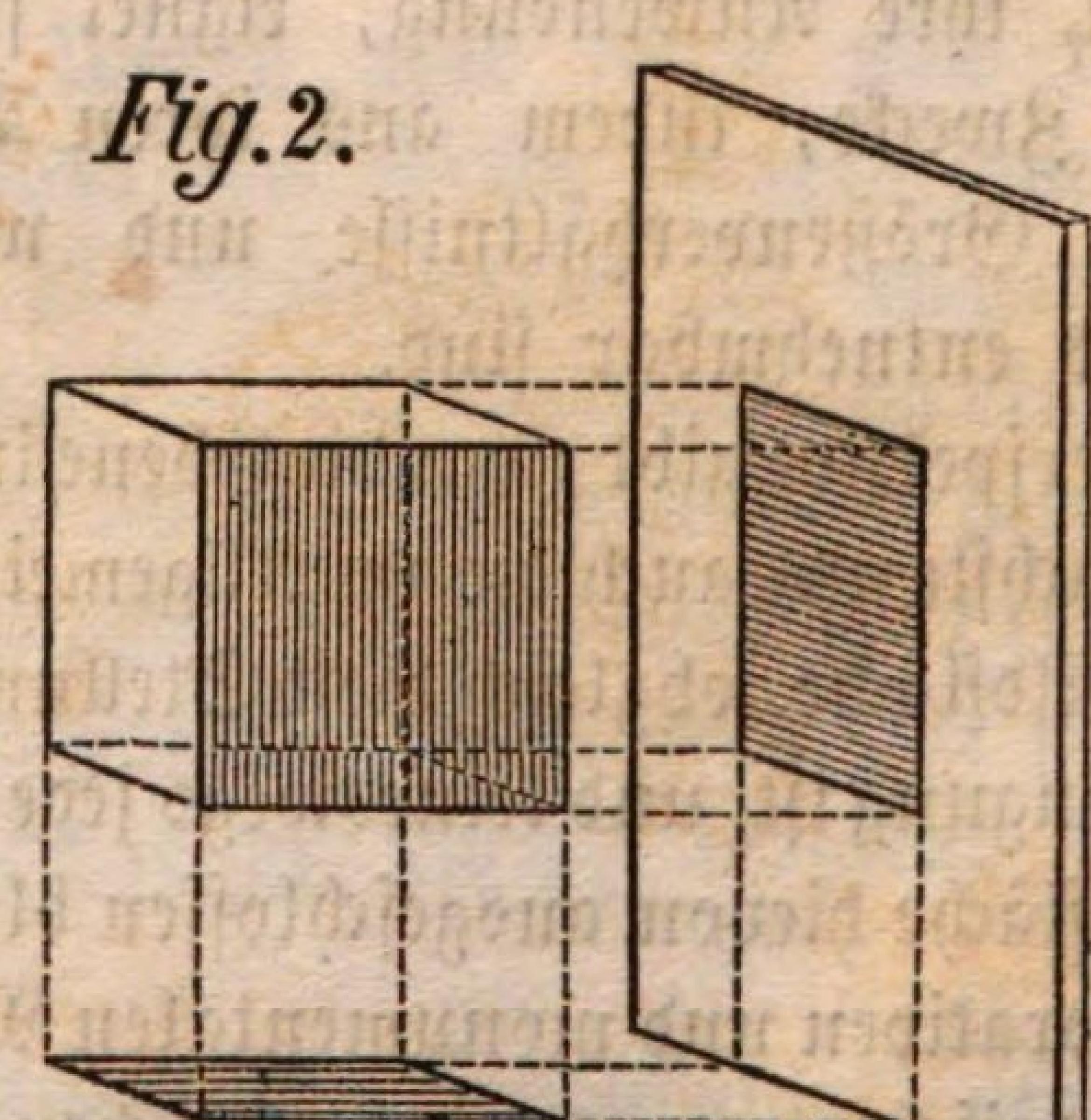
Vorzugsweise ist dem zeichnenden Künstler und Maler die Perspektive als Grammatik unentbehrlich, deren Regeln und Gesetze ihm vollkommen klar und geläufig sein müssen, damit dieselben frei und zwanglos seinen Schöpfungen sich anschmiegen, wodurch jene harmonisch malerische Wirkung sich entfaltet, deren Zauberreiz und correkte Wahrheit das Auge des Beschauers fesselt, und die jedem vollständigen Meisterwerke der Malerei eigenthümlich ist.

Geometrische, Parallel- oder orthographische Projektion.

8) Da die Central- und Parallel-Projektion Zweige eines Stammes sind, so kann auch die Entstehung des orthographischen Bildes auf das Prinzip der Perspektive zurückgeführt werden.

Nehmen wir an, die bei §. 4 gedachte Erzeugungslinie umschreibe tangirend einen Gegenstand und behalte zugleich eine stets parallele Lage mit irgend einer geraden Richtung oder Ebene bei, welche jedoch nie mit der Projektionsebene parallel sein darf, und entweder senkrecht auf dieser oder irgend eine andere Neigung haben kann, so wird der umschriebene Raum ein prismatischer oder cylindrischer, und sein Durchschnitt mit der Bildebene (Glastafel) das Bild des Gegenstandes sein, was dann eine o r t h o g r a p h i s c h e oder P a r a l l e l - P r o j e k t i o n genannt wird.

Fig. 2.



Ebenso läßt sich annehmen, daß die erzeugende Gerade in allen Lagen durch den Punkt des Auges gehe, und dieser Punkt in unermeßlicher Ferne von dem Gegenstande gedacht werde, wodurch sich die parallele Lage der Erzeugungslinie in ähnlicher Weise erklärt, wie bei der natürlichen Beleuchtung, wo wegen der Entfernung des Lichtkörpers die von ihm ausgehenden Strahlen als parallel betrachtet werden*).

9) Bei der Parallel-Projektion heißt die Bildebene Projektionsebene, die erzeugende Gerade eine projizirende Linie.

Die projizirende Linie kann hiebei senkrecht oder geneigt gegen die Projektionsebene gedacht werden, wo dann im ersten Falle die Projektion eine normale, gerade oder orthogonale heißt, die ihrer Einfachheit halber die meiste Anwendung in der Technik findet; im zweiten Falle aber die schiefe oder schräge Projektion sich ergibt.

A. Orthogonale Projektion.

Allgemeine Erläuterung hierüber.

10) Denken wir uns irgend einen durch eine horizontale Ebene durchschnittenen Körper nach dem Prinzipe der Parallel-Projektion auf einer horizontalen Projektionsebene projizirt, wobei die projizirende Linie normal stehend auf derselben angenommen ist, so wird das geometrische Größenverhältniß aller einzelnen Dimensionen dieses Körperschnittes vollkommen identisch sein mit dem Größenverhältniß der Projektion dieser Dimensionen.

---

*) Vergleiche „Beleuchtung mit parallelen Lichtstrahlen" im I. Abschnitt der III. Abtheilung dieses Werkes.

Ebenso wird auch die Projektion auf einer vertikalen Ebene, auf welcher die projizirende Linie normal ist, den vertikalen Durchschnitt dieses Körpers im gleichen Größenverhältnisse geben.

Hieraus wird dann durch derartige Projektionen eines Körpers auf verschieden gestellten Projektionsebenen, wodurch gleichsam eine Projektion der andern zur Erläuterung und Vervollständigung hilft, leicht die Bestimmung seines natürlichen Größenverhältnisses möglich.

11) Zu diesem Behufe genügt es gewöhnlich zwei Projektionsebenen anzunehmen, die in allgemeiner Anschauung zwar jede beliebige Neigung gegen einander haben können, bei praktisch technischer Anwendung aber immer normal angenommen werden, so daß die eine lothrecht, die andere wagrecht gedacht wird.

Manchmal wird auch noch eine dritte Projektionsebene in normaler Stellung auf beide ersteren angenommen, und man unterscheidet dann deren Projektionen (welche man auch Risse nennt) durch erste, zweite und dritte Projektion, wovon die beiden ersteren auch horizontale und vertikale Projektion oder Grund- und Aufriß, und die dritte Projektion Seitenansicht oder das Profil genannt wird*).

12) Die Schneidlinie zweier Projektionsebenen heißt Projektionsaxe oder Axe geradezu; dieselbe ist für das Construiren der Projektionen von besonderer Wichtigkeit.

Beim Zeichnen selbst denken wir uns immer die horizontale und vertikale Projektionsebene um ihre Axe so niedergelegt, daß eine Projektionsebene in die Verlängerung der andern zu liegen kommt, wobei wir uns die Drehaxe der dritten Ebene mit der horizontalen oder vertikalen in Gemeinschaft denken können, wo dann im ersten Falle die Seitenansicht eine liegende, im zweiten Falle eine stehende Lage erhält, wovon letztere Stellung die gewöhnlichere ist.

---

*) Projektionen innerer Theile von Maschinen, Gebäuden rc., wobei man sich dieselben durch eine senk- oder wagrechte Projektionsebene durchschnitten denkt, heißen vertikale oder horizontale Durchschnitte.

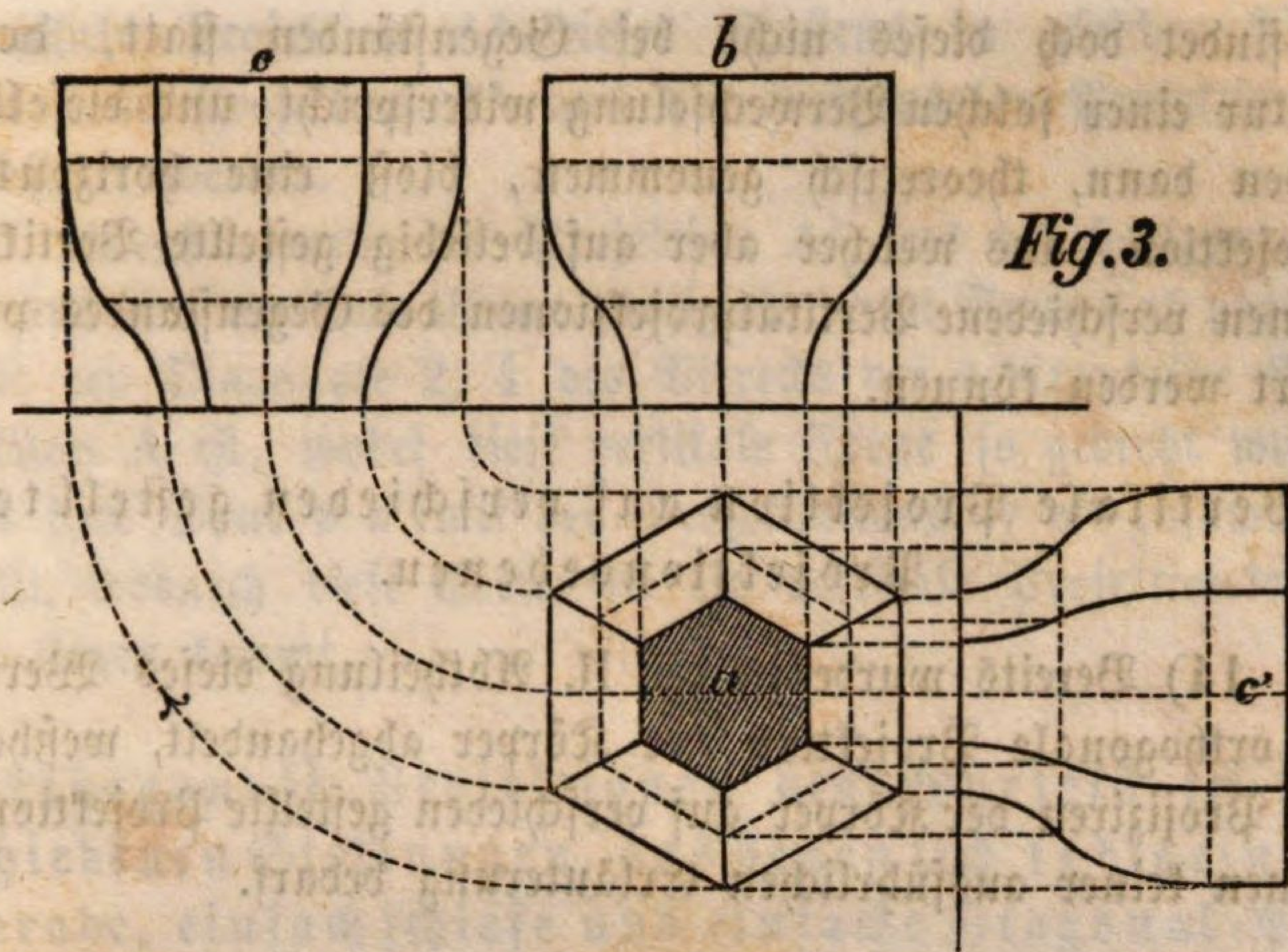


Fig. 3.

gibt in a und b den Grund- und Aufriß eines sechskantigen Körpers, dessen Seitenansicht c' liegend und in c stehend projizirt ist.

Immer sollen auch die verschiedenen Projektionen so viel als möglich dergestalt über und nebeneinander gestellt sein, wie sie sich bei dem Projiziren in gegenseitiger Beziehung ergeben, wodurch die einzelnen Theile, durch projizirende Linien in Beziehung oder Verbindung gebracht, das Erkennen der wechselseitigen Abstammung wesentlich erleichtern und sonach das Verständniß befördert wird.

13) Da sowohl die Stellung des darzustellenden Gegenstandes zu den rechtwinkelig zusammengestellten Projektionsebenen, sowie auch die Stellung der Projektionsebenen selbst, eine beliebige ist, so können nach dem Prinzipe der orthogonalen Projektion, nach welchem die projizirende Linie gegen jede Projektionsebene eine rechtwinklige Lage hat, verschiedene Ansichten von einem Gegenstande gewonnen werden.

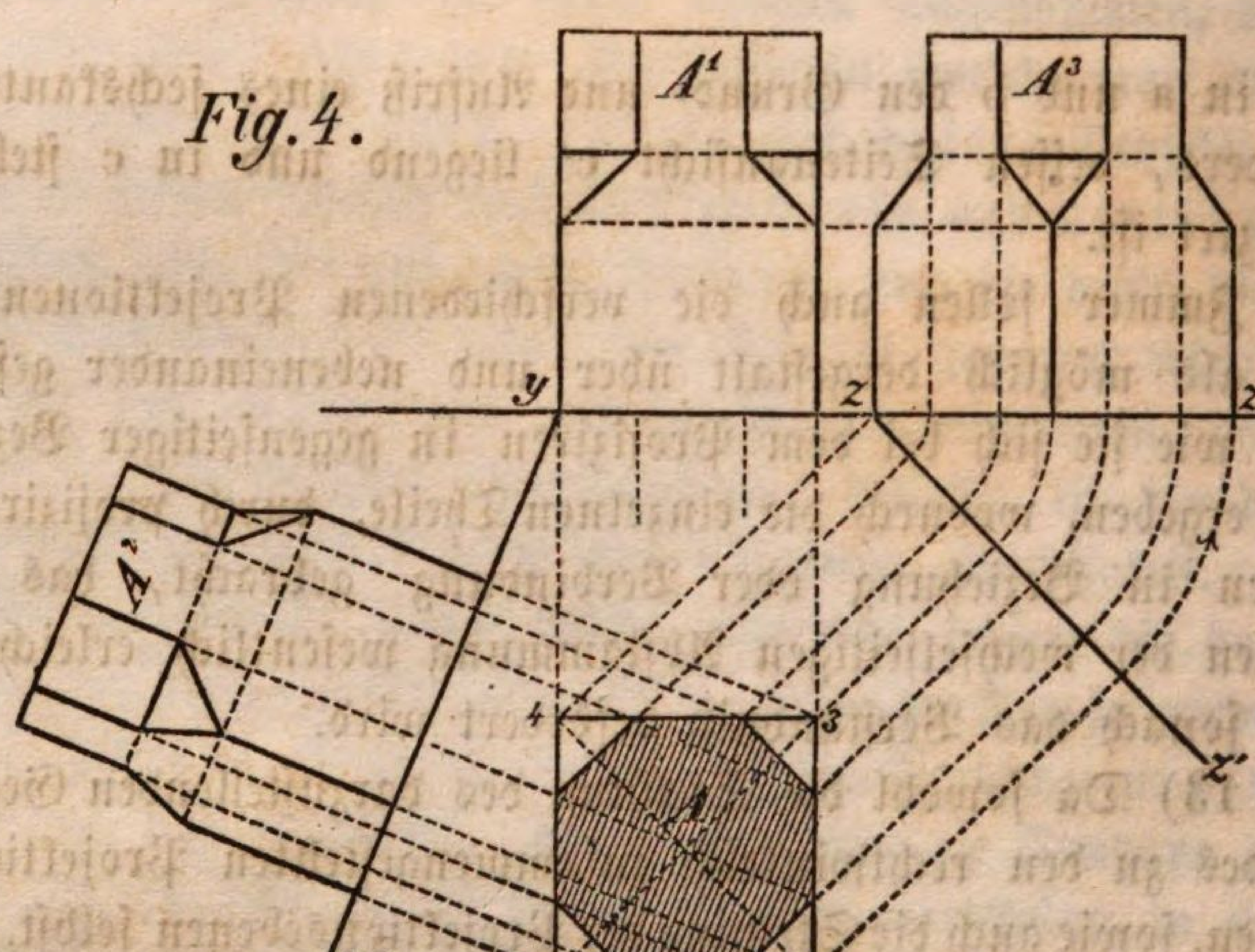
Obgleich nun die horizontale Projektion manches Gegenstandes durch einfaches Drehen des Gegenstandes und der Projektionsebene als seine vertikale Projektion und so umgekehrt die vertikale als horizontale betrachtet werden kann,

so findet doch dieses nicht bei Gegenständen statt, deren Natur einer solchen Verwechselung widerspricht und dieselben haben dann, theoretisch genommen, bloß eine horizontale Projektion, aus welcher aber auf beliebig gestellte Vertikalebenen verschiedene Vertikalprojektionen des Gegenstandes projizirt werden können.

Vertikale Projektion auf verschieden gestellte Projektionsebenen.

14) Bereits wurde in der II. Abtheilung dieses Werkes die orthogonale Projektion der Körper abgehandelt, weßhalb das Projiziren der Körper auf verschieden gestellte Projektionsebenen keiner ausführlichen Erläuterung bedarf.

Fig. 4.



In Fig. 4 haben wir in A und A¹ die horizontale und vertikale Projektion eines achteckigen Pfostens, dessen Sockel in das Viereck übergeht, vor uns. Wäre nun y y′ die horizontale Spur einer Projektionsebene, die wir uns in senkrechter Stellung auf y y′ und dann um ihre Spur y y′ in die horizontale Ebene umgelegt denken müssen, so kann die

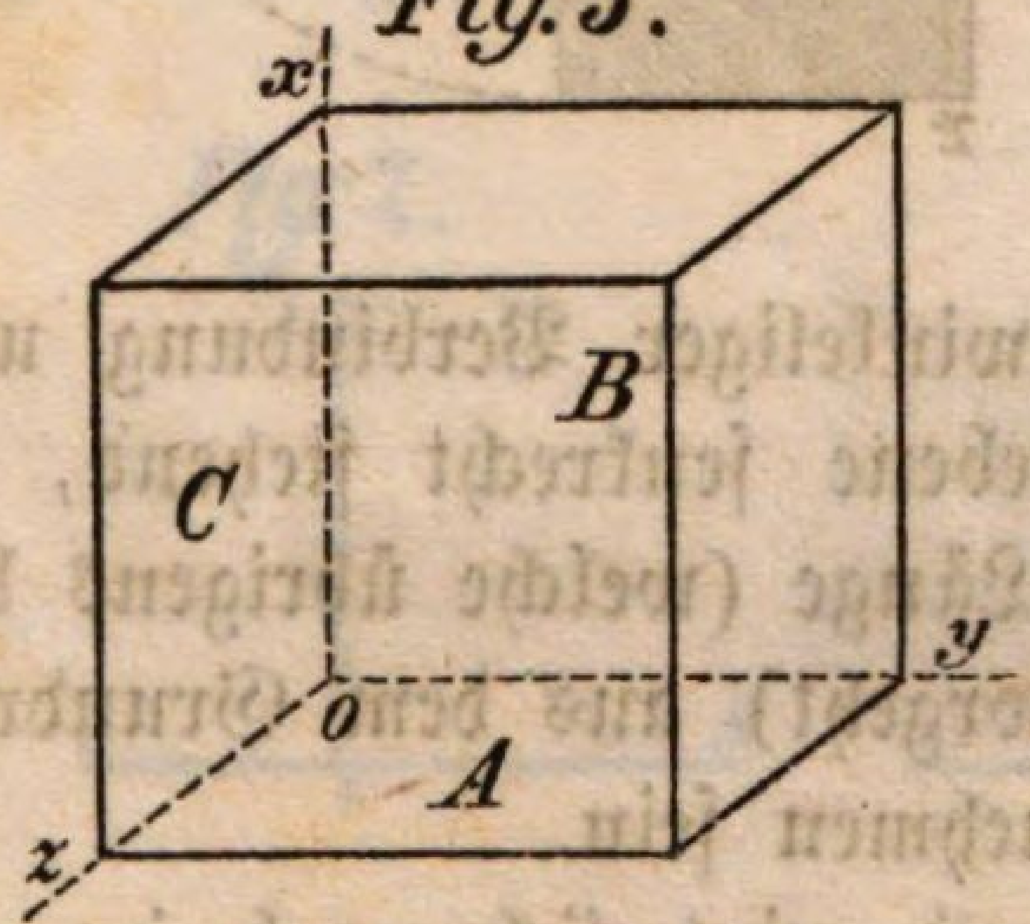
vertikale Projektion A^2 dieses Pfostens in gleicher Weise wie seine Projektion A^1 aus der horizontalen Projektion A projizirt werden.

Ebenso wurde die Projektion A^3 aus der horizontalen A auf eine vertikale Ebene projizirt, deren Spur z z′ parallel mit der Diagonale 2, 4 des Vierecks der horizontalen Projektion A ist, wobei diese vertikale Ebene so gedreht wurde, bis ihre Spur z z′ mit der Projektionsaxe y z″ zusammenfällt, wodurch diese Ebene in die vertikale Projektionsebene zu liegen kommt.

Orthogonale Projektionen des Würfels in verschiedenen Stellungen, aus denen sich 1) die einfach gerade, einfach schiefe und einfache Diagonal-Projektion, so wie 2) die isometrische, monodimetrische und anisometrische Projektion entwickelt.

15) Denken wir uns je drei, z. B. die in o zusammenlaufenden Kanten o x, o y und o z des Würfels Fig. 5

Fig. 5.



als Axen oder Durchschnittslinien der Würfelebenen A, B und C, welche wir im Allgemeinen in ihrer rechtwinkeligen Zusammenstellung als die drei Coordinatenebenen bezeichnen wollen, auf denen die drei Raumausdehnungen, nämlich Länge, Breite und Höhe eines Körpers sich darstellen, und deren drei zusammenstoßende Schnittlinien die Coordinatenaxen geben, so wird bei den verschiedenen Stellungen des Würfels

sich sein Bild ändern und sich auch das Längenverhältniß der Projektionen dieser Axenlinien verschieden gestalten.

Einfach gerade Ansicht.

16) Wird derselbe in seiner einfachsten Stellung projizirt, Fig. 6, wobei seine Seiten parallel zu jeder der drei Projektionsebenen bleiben, so werden im Aufrisse je zwei seiner rechtwinkelig gegen einander stehenden Kanten, nämlich die Höhen- und Längenaxen o x und o y, welche parallel mit der vertikalen Projektionsebene gehen, oder auch als in ihr liegend gedacht werden können, in wahrer Größe erscheinen; die dritte Kante o z aber als Breitenaxe gleichfalls mit o x

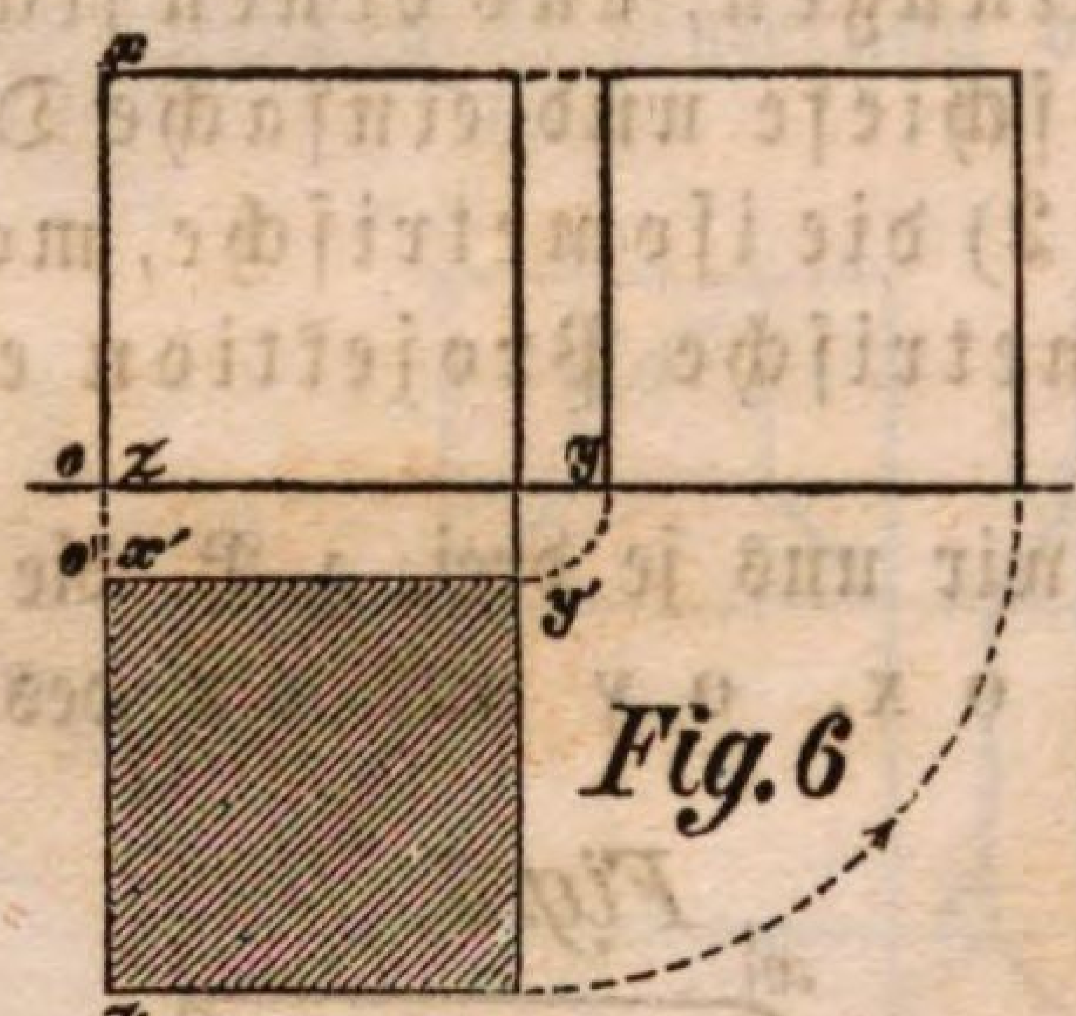


Fig. 6

und o y in rechtwinkeliger Verbindung und auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehend, wird gleich Null, und deren wahre Länge (welche übrigens hier schon aus den Aufrißkanten hervorgeht) aus dem Grundrisse oder der Seitenansicht zu entnehmen sein.

Dieser Umstand zeigt sich auch im Grundriß, wo die Höhenaxe o′ x′ und in der Seitenansicht, wo die Längenaxe o′ y′ gleich Null werden; durch diese Projektionsweise, bei der stets zwei Kantensysteme in wahrer Größe erscheinen, erhalten wir die einfach gerade Ansicht.

Einfach schiefe Ansicht.

17) Verändern wir die Stellung dieses Körpers in der Weise, daß zwei seiner Seiten schief zur vertikalen Projektions-

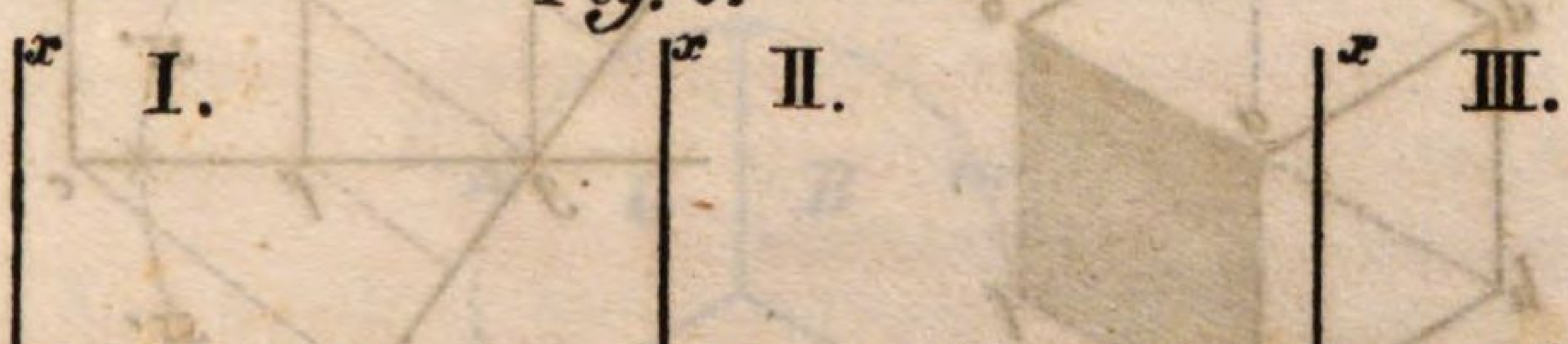
ebene stehen, wie in Fig. 1 Blatt I (wobei wir zuerst seinen Grundriß zeichnen), so wird seine Höhenaxe o x, welche parallel mit der vertikalen Projektionsebene steht, im Aufriß die wahre Größe beibehalten, die Längen- und Breitenaxe o y und o z aber verhältnißmäßig verkürzt erscheinen und zwar hier der Stellung gemäß o y weniger und o z mehr verkürzt, woraus sich die einfach schiefe Ansicht ergibt.

Selbstverständlich bezieht sich das Prädikat „schief" auf die Stellung der Projektionsebene, nicht aber auf die Neigung der projizirenden Linie gegen diese.

Diagonal- oder Ueberecks-Ansicht.

18) Geben wir dem Körper eine solche Stellung wie bei Fig. 2 Blatt I, wo beide Axen o y und o z ganz gleich verkürzt erscheinen, die Höhenaxe o x aber unverkürzt bleibt, so gäbe dieß eine Uebereck- oder Diagonal-Ansicht, welche jedoch bei Gegenständen mit quadratischen Grundflächen weniger vortheilhaft ist als wie die einfach schiefe Projektion, indem sich die diagonal liegenden Theile der Mitte decken.

Fig. 7.



gibt uns in I, II und III die Axenprojektion der einfach orthogonalen, einfach schiefen und Diagonal-Ansicht.

Isometrische Projektion.

19) Wenn wir uns, wie in Fig. 3 Blatt I, den Würfel auf einer seiner Ecken gegen die horizontale Projektionsebene gestellt denken, wobei seine Grundfläche eine derartig geneigte Stellung zur horizontalen Projektionsebene hat, daß

seine Diagonale a g senkrecht auf derselben steht, so werden die Kanten des Würfels mit der Diagonale a g und also auch mit der Projektionsebene gleiche Neigungswinkel haben und ihre Projektion im gleichen Verhältniß verkürzt, sonach beim Würfel gleich lang erscheinen.

Die drei Kanten a' e', a' b' und a' d', welche an dem oberen Eckpunkte a' der Diagonale a g entspringen, werden je zwei und zwei Winkel von 120° bilden.

In gleicher Weise projiziren sich auch die am untern Eckpunkte g der Diagonale a g zusammenstoßenden drei Kanten g' c', g' f' und g' h', so daß der ganze Umriß des Würfels in der horizontalen Projektionsebene ein regelmäßiges Sechseck bildet, wobei die Diagonalen b' d', d' e' und e' b' der drei obersten Quadrate wagrecht liegen, sonach bei b' d' e' in wahrer Größe erscheinen.

Geben wir nun dieser horizontalen Projektion eine solche Drehung wie bei Fig. 8 und denken uns die Stellung des

Fig. 8.

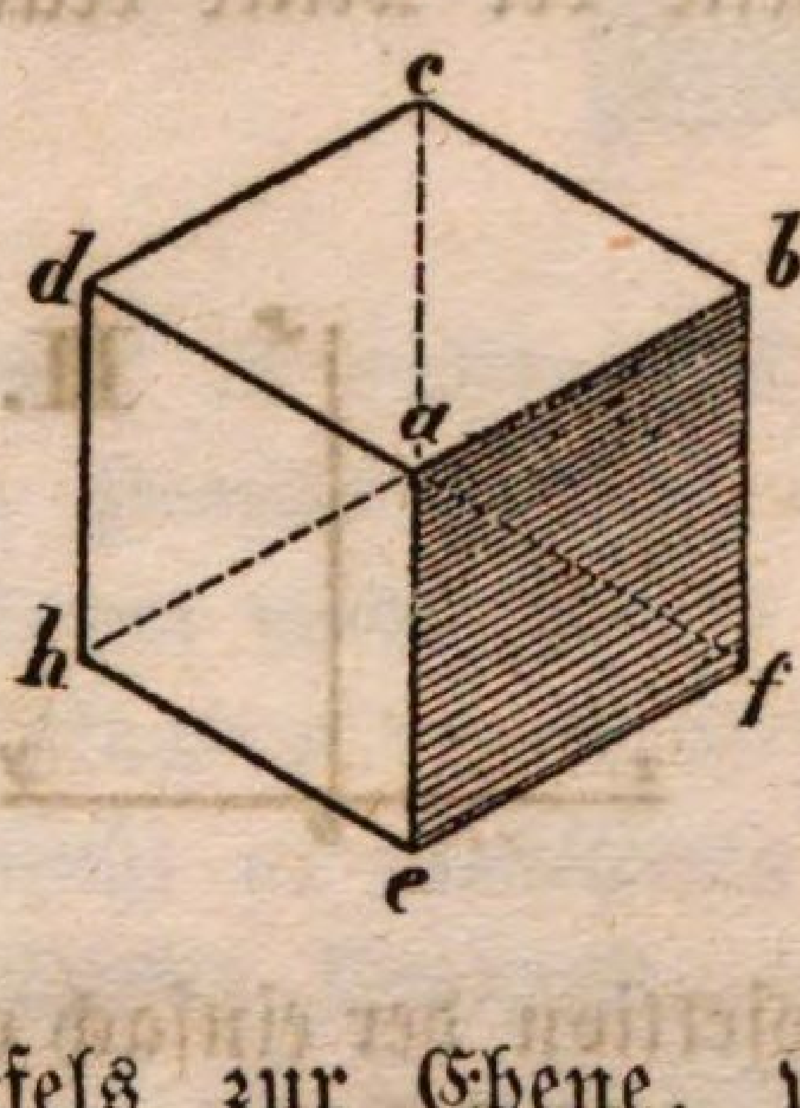
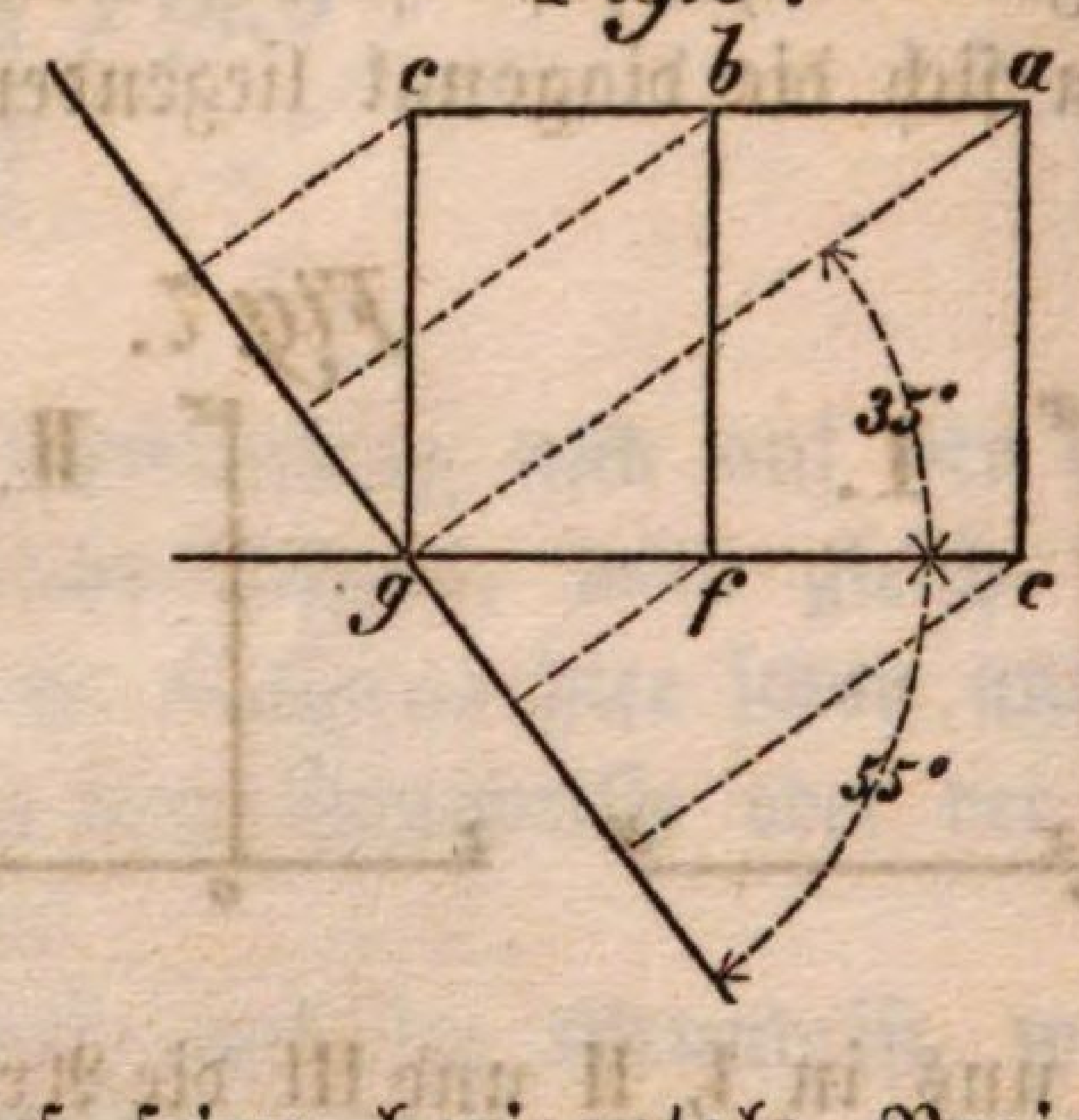


Fig. 9.



Würfels zur Ebene, worauf seine horizontale Projektion verzeichnet ist, immer unverändert, jedoch Würfel und Ebene in eine Lage gebracht, wodurch diejenige seiner Kanten, welche durch a' e' vorgestellt ist, in Wirklichkeit senkrecht steht, so wird die ursprünglich senkrecht stehende Diagonale a g des Würfels sich unter einem Winkel von 35° gegen den Horizont neigen und die anfangs horizontale Projektionsebene, welche stets noch mit der Diagonale rechtwinkelig verbleibt, wird

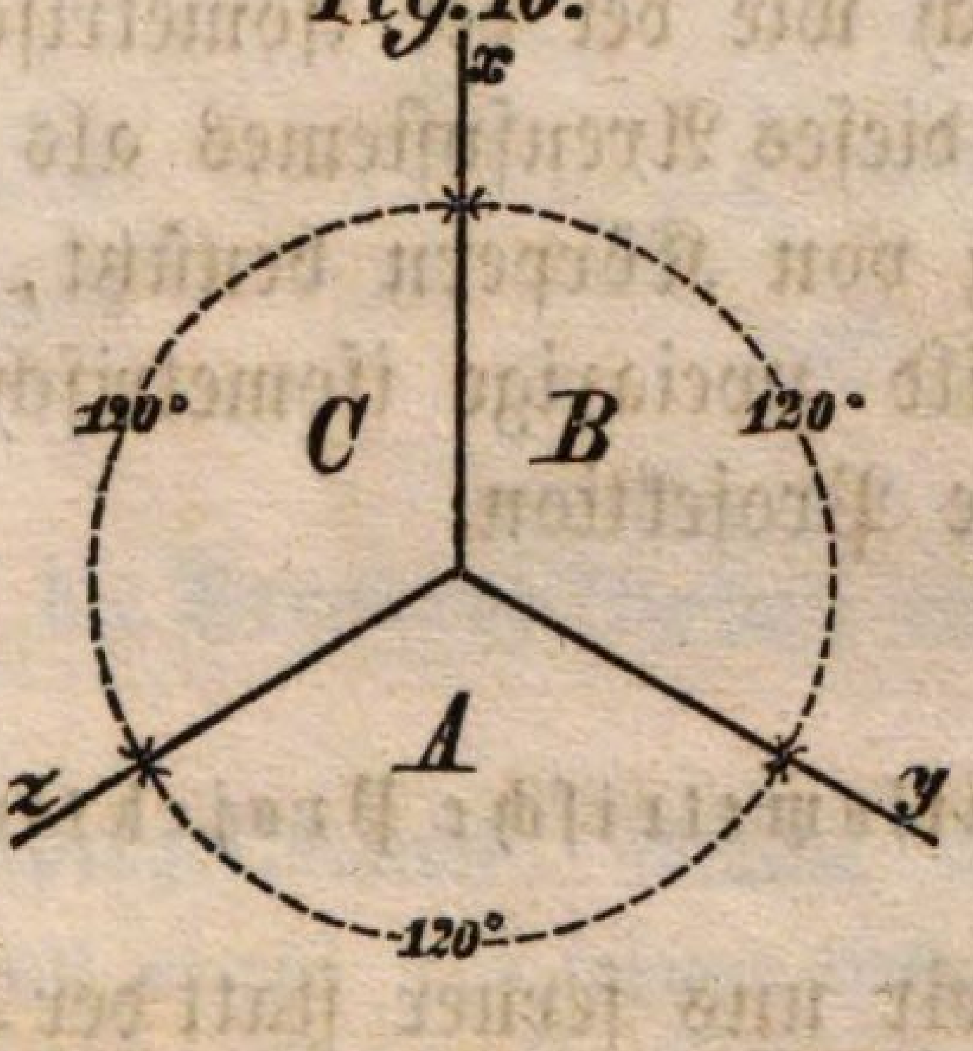
jetzt mit dem Horizonte einen Winkel von 55° bilden, welcher den obigen zu einem rechten Winkel ergänzt. Vergleiche Fig. 9.

In dieser Stellung der Projektionsebene wird die frühere horizontale Projektion des auf der Spitze stehenden Würfels zur isometrischen Projektion des nun auf seiner Grundfläche ruhenden Körpers.

Diese Projektion, welche sich der Perspektivansicht nähert, vereinigt die drei Raumausdehnungen des Körpers in einer Ansicht und gibt sonach Aufriß, Grundriß und Seitenansicht zugleich und zwar nach einerlei Maßstab, jedoch mit verzogenen Winkeln, weßhalb dieselbe isometrische (gleiches Maß haltende) Projektion oder auch dreiaxige isometrische Projektion genannt wird.

20) Betrachten wir die isometrische Projektion der drei rechtwinkelig zusammengestellten Würfelebenen A, B, C, als Coordinaten- oder Projektions-Ebenen für die bildliche Darstellung körperlicher Gegenstände, so werden diese Ebenen sich paarweise in den Kanten o x, o y und o z schneiden und deren gleich groß angenommene Höhen-, Längen und Breiten-

Fig. 10.



kanten oder Axen 1) von gleichem verkürzten Ausdehnungsverhältnisse sein, und 2) ihre projizirten Neigungswinkel 120° betragen.

Monodimetrische Projektion.

21) Geben wir der Grundfläche des auf seiner Spitze stehenden Würfels eine solche Neigung zur horizontalen Pro-

jektionsebene wie bei Fig. 4 Blatt I, wobei die Diagonale a g nicht mehr senkrecht auf letzterer ist, so werden die beiden horizontalen Kanten- oder Axenprojektionen g′ f′ und g′ h′ der erwähnten Würfelebenen sich gleich lang verkürzen, während die Kante g′ c′ mehr oder weniger verkürzt erscheint als jene beiden, und zwar wird sie um so kürzer werden, je kleiner der Neigungswinkel der Würfel-Grundfläche zur horizontalen Ebene ist, und so umgekehrt wird diese Kante g′ c′ um so länger erscheinen, je größer dieser Neigungswinkel wird.

Hiebei beträgt im ersteren Falle der Winkel der Kanten g′ f′ und g′ h′ weniger als 120°, im letzteren Falle aber mehr als 120°.

Zugleich wird die Projektion der Kante g′ c′ den Winkel der andern beiden Projektionen g′ f′ und g′ h′ in zwei gleiche Theile theilen.

Demnach werden von den drei gleich groß angenommenen Würfelkanten oder Axen in der horizontalen Projektion sich zwei hievon gleich groß verkürzt zeigen, während die dritte in einem andern, jedoch bestimmten Verkürzungsverhältnisse zu den beiden ersteren steht.

Werden ähnlich wie bei der isometrischen Projektion die drei Würfelebenen dieses Axensystemes als Coordinatenebenen für die Darstellung von Körpern benützt, so heißt das hiedurch projizirte Bild zweiaxige isometrische Projektion oder monodimetrische Projektion.

Anisometrische Projektion.

22) Denken wir uns ferner statt der Diagonalprojektion des Würfels wie bei Fig. 3 und 4 Blatt I, die einfach schiefe Projektion desselben in der geneigten Stellung zur horizontalen Ebene (Fig. 5 Blatt I), so wird die horizontale Projektion jeder der drei Würfelkanten in ungleicher Länge verkürzt erscheinen.

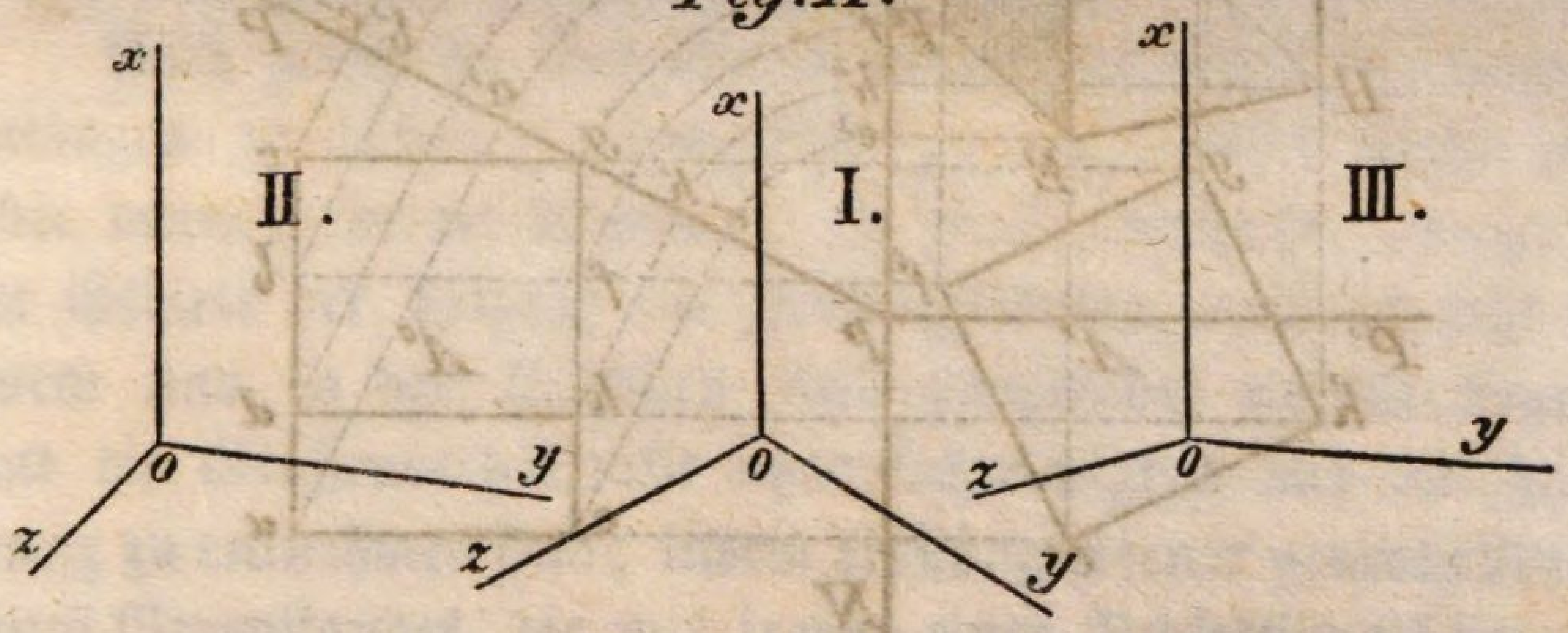
Hiebei haben dann die drei gleich groß angenommenen Würfelkanten verschieden verkürzte Längen, welche jedoch in

einem bestimmten Verhältnisse zu einander stehen, daher das durch dieses Axensystem projizirte Bild anisometrische Projektion genannt wird.

23) Wir erhalten sonach aus den dreierlei Würfelprojektionen Fig. 3, 4, 5 Blatt I, drei verschiedene Axensysteme, woraus bei den zwei letzt erwähnten Systemen durch die verschiedenen möglichen Projektionen der drei Axen das Längenverhältniß derselben sich ebenso verschiedenartig entwickelt und wobei stets jede der Axen oder Kanten der drei Würfelebenen beliebig als Höhen=, Längen= oder Breitenaxe betrachtet werden kann.

Bei diesem beliebig zu wählenden Axenverhältnisse wird daher auch das Bild ein und desselben auf diese Würfelebenen projizirt gedachten Gegenstandes sich verschiedenartig gestalten.

Fig. 11.



gibt in I, II und III die Axenprojektionen dieser drei erwähnten Systeme.

24) Die Axenprojektionen, welche wir hier durch die orthogonale Projektion eines auf seiner Ecke stehenden Würfels auf der rechtwinkeligen Projektionsebene entwickelt haben, können geeigneter auch auf einer schrägen Projektionsebene ermittelt werden, wobei die projizirende Linie rechtwinkelig auf dieser und der Würfel in gerader Stellung anzunehmen ist.

In diesem Falle sind in Fig. 12 und 13 A′ der Grundriß und A° die in die Grundrißebene gelegte Seitenansicht des Würfels und N p die gemeinschaftliche Axe der hiezu benützten Projektionsebenen.

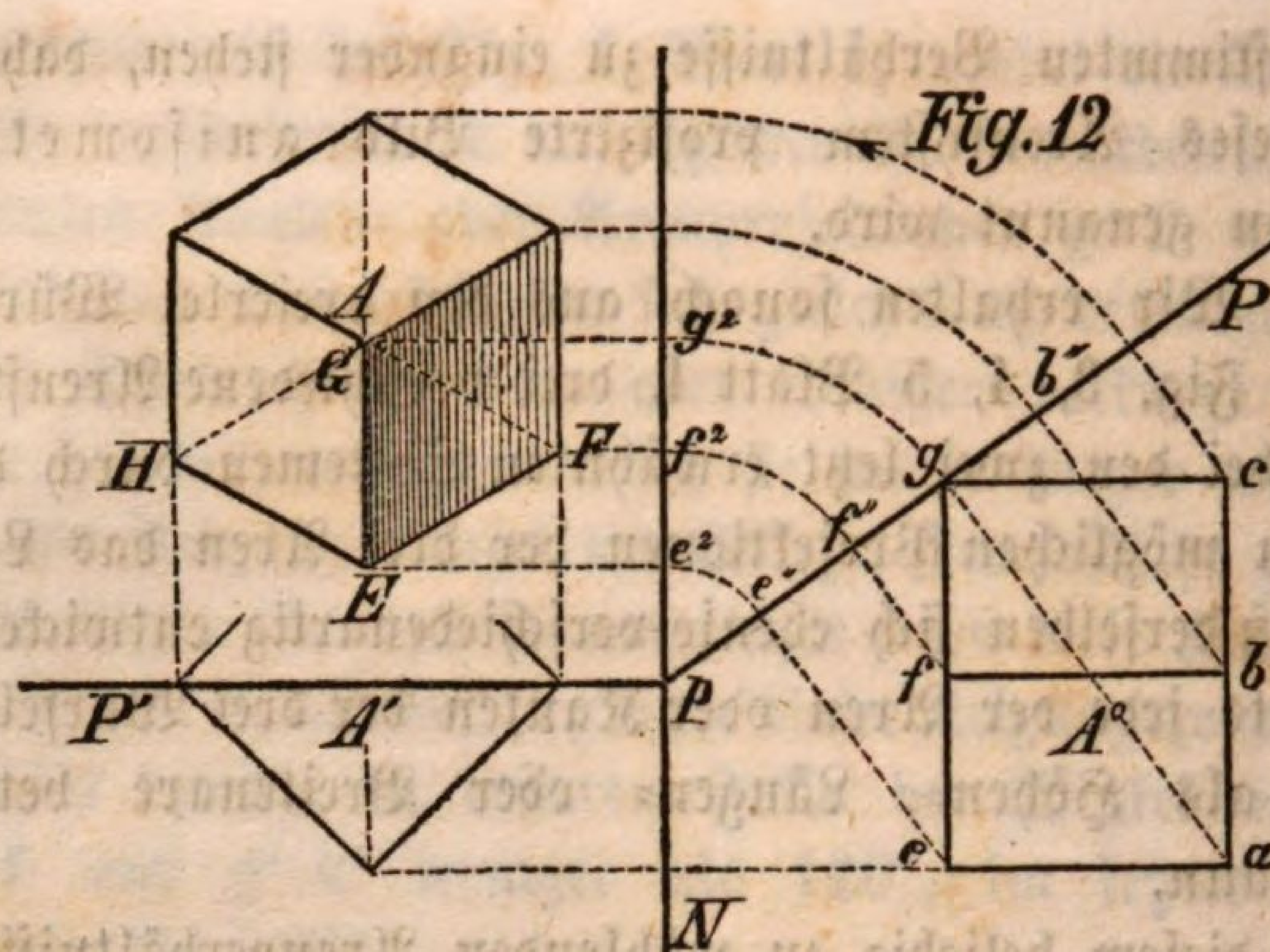


Fig. 12

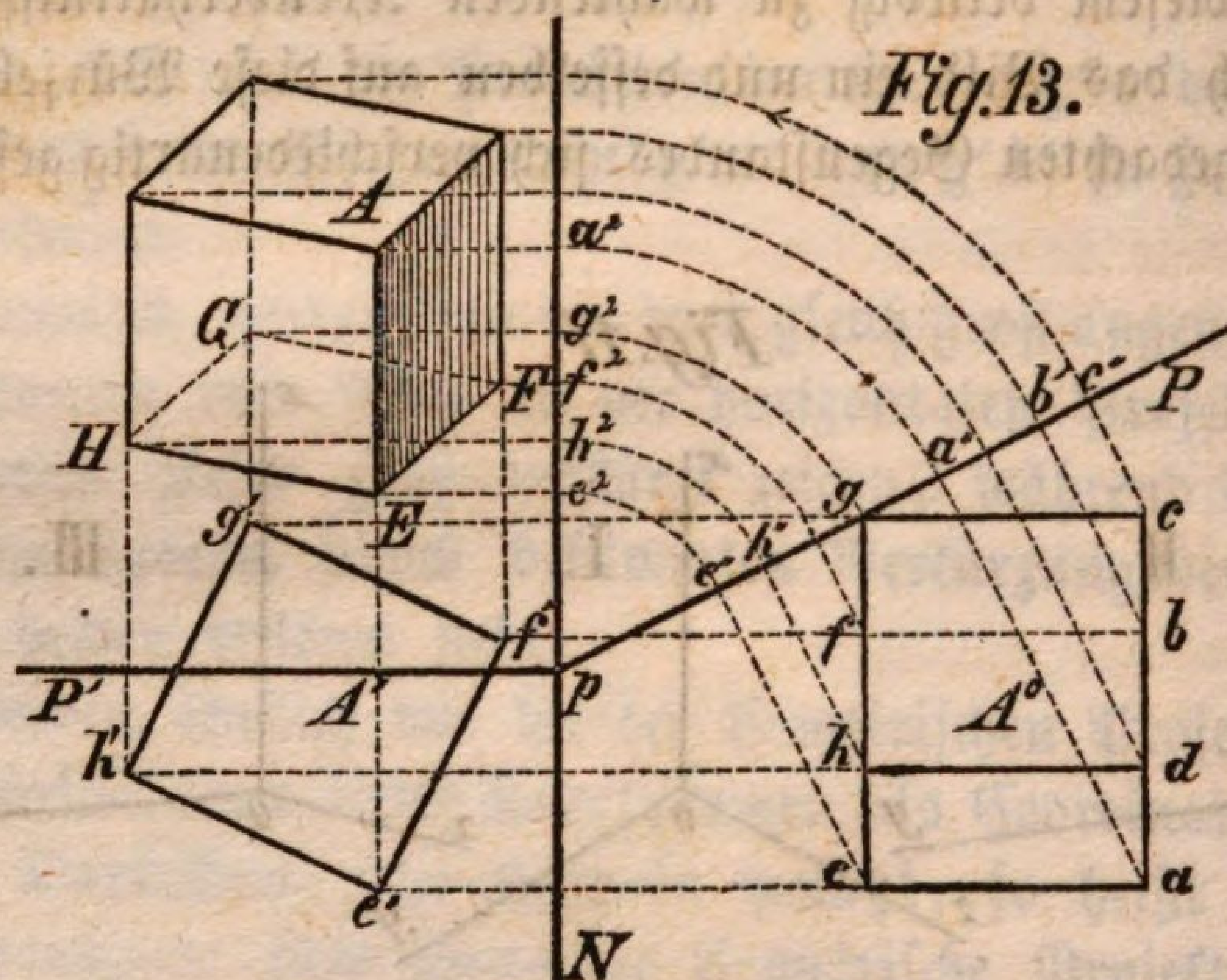


Fig. 13.

Denken wir uns nun durch den unteren Eckpunkt g des Würfels, dessen horizontale Projektion g' ist, die schräge Projektionsebene gelegt, deren Spur P' p normal auf N p steht, und deren in die horizontale Projektionsebene umgelegte Seitenansicht oder Profil p P wäre und wovon P' p zugleich auch als allgemeine Projektionsaxe der horizontalen und vertikalen Projektionsebene gedacht werden kann;

Denken wir uns ferners alle Eckpunkte des Körpers auf diese schräge Ebene projizirt, wobei die projizirenden Linien rechtwinkelig auf p P sind: so erhalten wir in e'', f'', g und h'' die Durchschnittspunkte, welche auf die aus dem

Grundrisse A' errichteten Senkrechten aufgetragen in E, F, G, H das Bild der Grundfläche des Würfels geben, dessen obere Fläche in gleicher Weise aus den Punkten a", b" u. s. w. hervorgeht, woraus sich dann die Seitenflächen desselben von selbst ergeben.

Dieses Auftragen der Durchschnittspunkte geschieht, indem man z. B. p e", p f" u. s. w, von der Spur P' p aus auf die entsprechenden Senkrechten des Grundrisses A' bringt.

Anwendung dieser Projektionsweisen in der Praxis.

25) die Projektionen der einfach orthogonalen Ansicht, welche uns nur ein conventionelles Bild geben, woraus der Verstand durch mathematische Schlüsse die wirkliche Form und die Größenverhältnisse ableiten kann, entbehren zwar die subjektive Wahrheit der Perspektiv-Ansicht, haben aber dafür eine größere objektive Wahrheit.

Auch geben sie kein übersichtliches Gesammtbild, sondern bedingen zu dessen Zusammensetzung ein geübtes Auge, sind aber dennoch in der Baukunst, im Maschinenfache, überhaupt im Gebiete der Technik am gebräuchlichsten, weil sie sehr bequem und in der kürzesten Zeit ausgeführt werden können und die Größenverhältnisse ohne Schwierigkeit aus der Zeichnung zu entnehmen sind; indem die Längen jener geraden Linien eines Gegenstandes, die mit irgend einer Projektionsebene parallel laufen, unmittelbar gemessen werden können, während die wahre Größe und Lage jener Linien, welche geneigt oder verkürzt erscheinen, durch ein einfaches Verfahren ermittelt werden kann, wobei die drei Projektionen sich gegenseitig unterstützen.

26) Die einfach schiefe und die Diagonalprojektion findet im Allgemeinen weniger Anwendung, obgleich ihr Grund- und Aufriß zusammen, wovon letzterer zugleich die Seitenansicht enthält, weit mehr Uebersicht der Form gewähren, als jene drei Projektionen der einfach geraden Ansicht.

27) Die isometrische Projektion läßt sich aus der einfach orthogonalen Projektion ableiten, jedoch ist letztere hiezu nicht unbedingt nöthig, wenn die Dimensionen des

Gegenstandes in Maßen gegeben und der Verjüngungsmaßstab festgestellt ist.

Da die Projektionen aller Linien im Raume, welche mit den drei Axen parallel sind, auch parallel mit deren Projektionen und in demselben Verhältniß verkürzt erscheinen, so können mit Leichtigkeit alle Längen auf die drei Axen nach einem und demselben verjüngten Maßstabe aufgetragen, und ebenso auch durch ein einfaches Verfahren die wirklichen Größenverhältnisse jener Längen, welche nicht mit den Axen parallel liegen, ermittelt werden, weßhalb diese isometrische Methode zum Zeichnen technischer Gegenstände, Maschinen 2c. 2c. sich vorzüglich eignet.

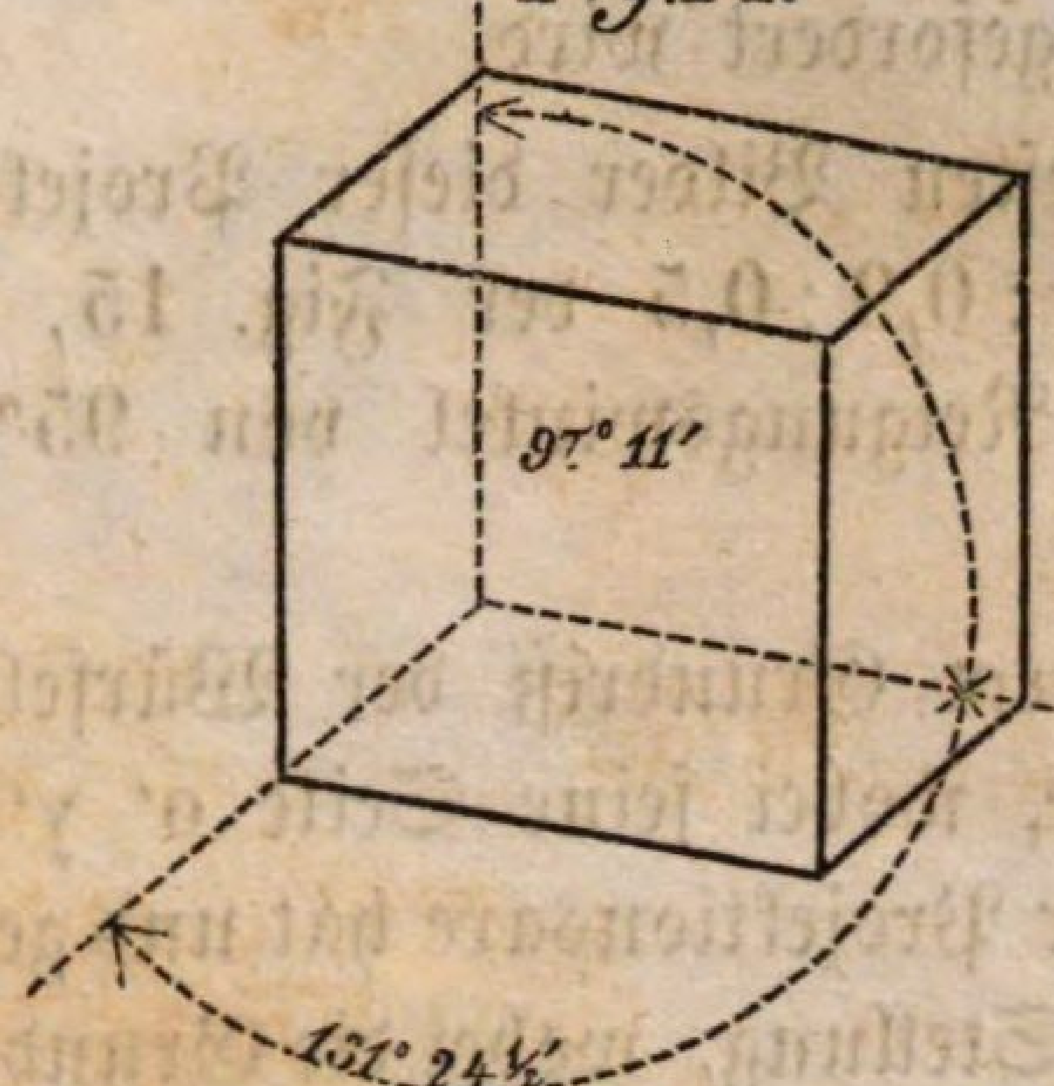
Immer bleiben aber hiefür jene darzustellenden Gegenstände die passendsten, welche lauter Begrenzungslinien haben, die mit den drei rechtwinkeligen Würfelebenen parallel laufen, und welche man zugleich von einem höheren Standpunkte aus zu sehen sich gewöhnt hat.

Uebrigens gibt die isometrische Projektion in einem größeren Grade eine klare Vorstellung von dem Gegenstande als eine Perspektiv-Ansicht, indem der Parallelismus der Linien dem gewohnten Begriffe weit mehr entspricht als die Convergens der perspektivischen Linien.

28) Vergleichen wir das isometrische Bild mit dem monodimetrischen, so zeigt sich beim letzteren der Gegenstand in mehr aufrechter Stellung; übrigens lassen sich an beiden Darstellungsweisen die den drei Hauptaxen parallel liegenden Theile leicht finden, weßhalb selbe für solche Gegenstände, welche rechte Winkel bilden, wie z. B. Holzverbände, Durchschnitte von Baukonstruktionen u. s. w. zu gebrauchen sind.

Unter den verschiedenen möglichen Axenverhältnissen der monodimetrischen Projektionsweise gibt **1 : 1 : 1/2** bei Fig. **14** eines der besten Bilder, wobei das Zeichnungsverfahren durch dieses einfache Axenverhältniß sehr erleichtert, und das Abnehmen der Maße durch einen für die eine Axe geltenden Maßstab auszuführen ist.

Fig. 14.

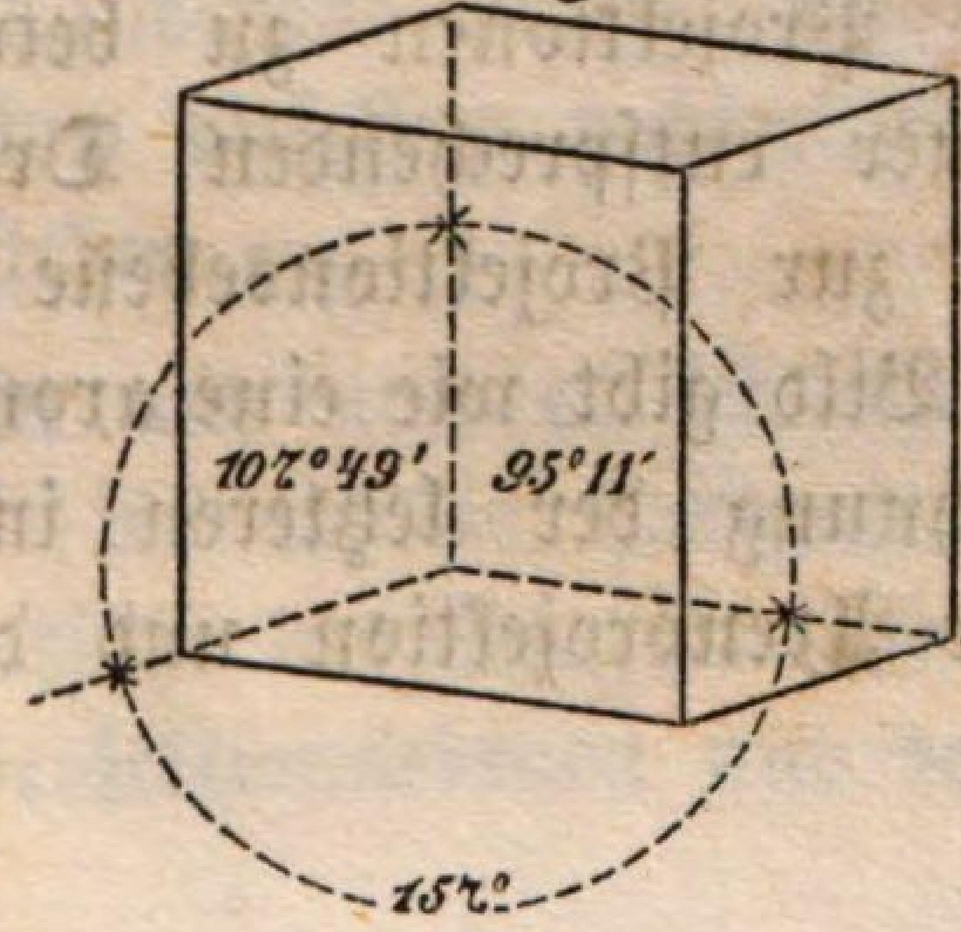


Die Neigungen der Projektionen dieses Axenverhältnisses bilden die Winkel von 97° 11′, 131° 24½′.

Um in Fig. 4 Blatt I eine Würfelprojektion in dem monodimetrischen Axenverhältnisse 1 : 1 : ½ zu erhalten, theile man die Diagonale des Würfelquadrats Fig. 2 in drei gleiche Theile, trage einen Theil hievon nach g n Fig. 4 auf, errichte die Senkrechte n c und bringe die Würfelhöhe C z von g nach c, wodurch sich die Stellung des Würfelaufrisses ergibt, dessen horizontale Projektion im obigen Axenverhältnisse sich darstellt.

29) Bei der anisometrischen Projektion, wo die drei Axenprojektionen in einem ungleich verkürzten Verhältnisse zu einander stehen, bedürfen wir für jede Axenlänge einen eigenen Maßstab, wodurch das Zeichnen derselben etwas umständlicher wird. Dafür kommt aber auch dieselbe der subjektiven Wahrheit des Perspektivbildes am nächsten, weßhalb sie nebst der monodimetrischen Projektion vorzugsweise da

Fig. 15.



ihre Anwendung findet, wo diese subjektive Wahrheit des Bildes besonders gefordert wird.

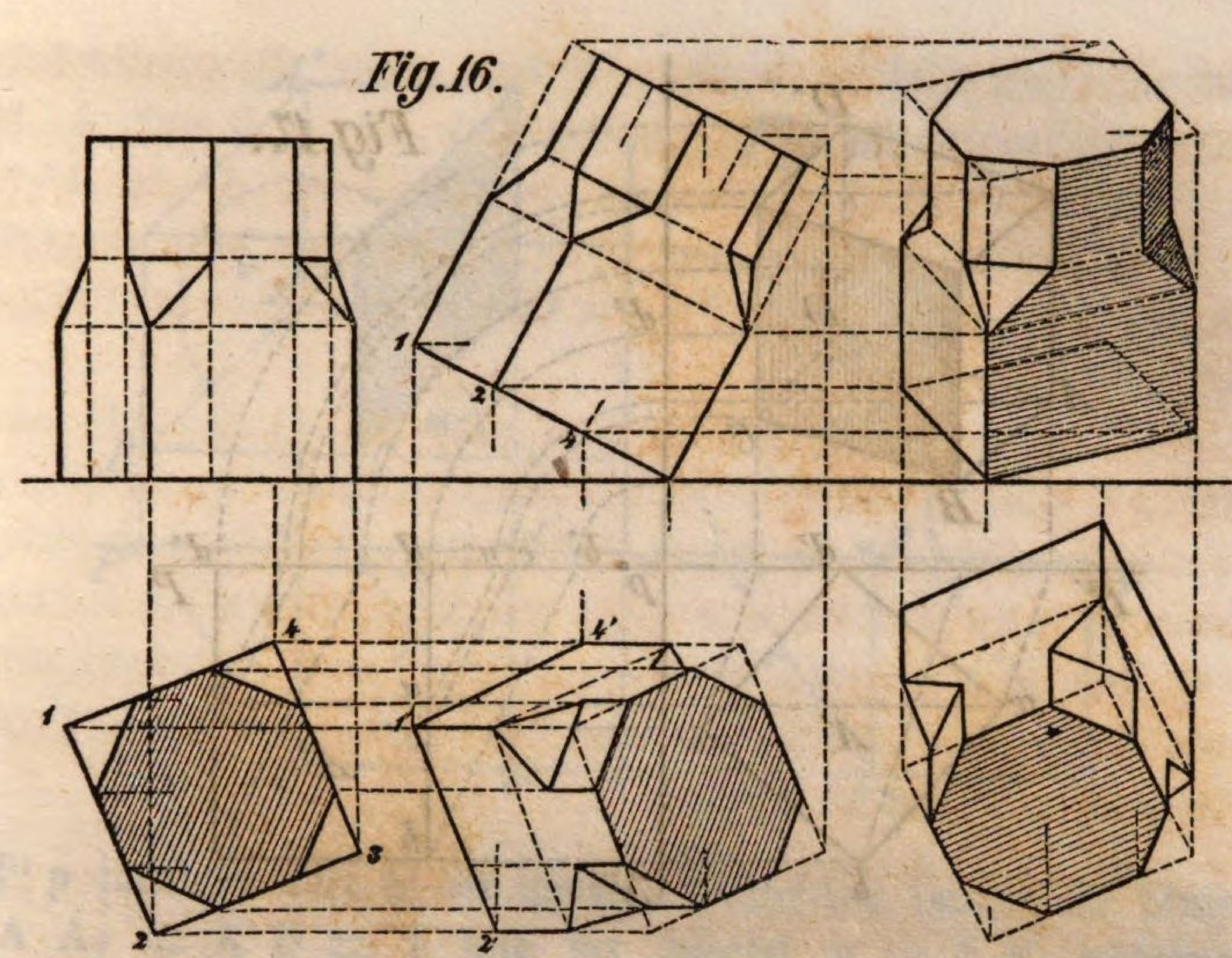
Eines der besten Bilder dieser Projektionsart gibt das Axenverhältniß 1 : 0,9 : 0,5 der Fig. 15, wobei die Axenprojektionen die Neigungswinkel von 95° 11′, 157° und 107° 49′ bilden.

Geben wir dem Grundriß der Würfelprojektion Fig. 1 Blatt I eine Lage, wobei seine Seite o′ y′ einen Neigungswinkel von 21° zur Projektionsaxe hat und geben wir in Fig. 5 dem Aufrisse eine Stellung, wobei die Grundfläche des Würfels einen Neigungswinkel von 29° zur horizontalen Projektionsebene erhält, so wird die hervorgehende Würfelprojektion das anisometrische Axenverhältniß 1 : 0,9 : 0,5 erhalten.

30) Im Uebrigen unterscheiden sich die auf gleichem Prinzipe beruhenden isometrischen, monodimetrischen und anisometrischen Projektionen nur insoferne von einander, als sich gleiche, mit irgend einer Axe parallele Linien, nicht gleich groß projiziren; sie stimmen aber insoferne überein, als alle solche Linien verjüngt sich darstellen, und die Darstellung eines Körpers mittelst der zu construirenden Axenprojektion und der hiezu nöthigen Maßstäbe gezeichnet werden kann, weßhalb auch die Lehre dieser Projektionsweisen die A x o n o m e t r i e genannt wird.

So bildet auch die einfach gerade, einfach schiefe und Diagonal-Ansicht mit ihrem Grundriß, Aufriß und Seitenriß, gleichsam im engeren Sinne, die g e o m e t r i s c h e oder o r t h o g o n a l e Projektion, während jene Parallelprojektionen, welche in einer Ansicht die drei Dimensionen des Körpers geben, als axonometrische Projektionen zu betrachten sind, obgleich auch bei einer entsprechenden Drehung und Neigung des Körpers zur Projektionsebene seine geometrische Projektion dasselbe Bild gibt wie eine axonometrische Ansicht, nur daß die Zeichnung der letzteren in leichterer Weise, nämlich mittelst der Axenprojektion und deren Maßstäbe zu construiren ist.

Fig. 16.

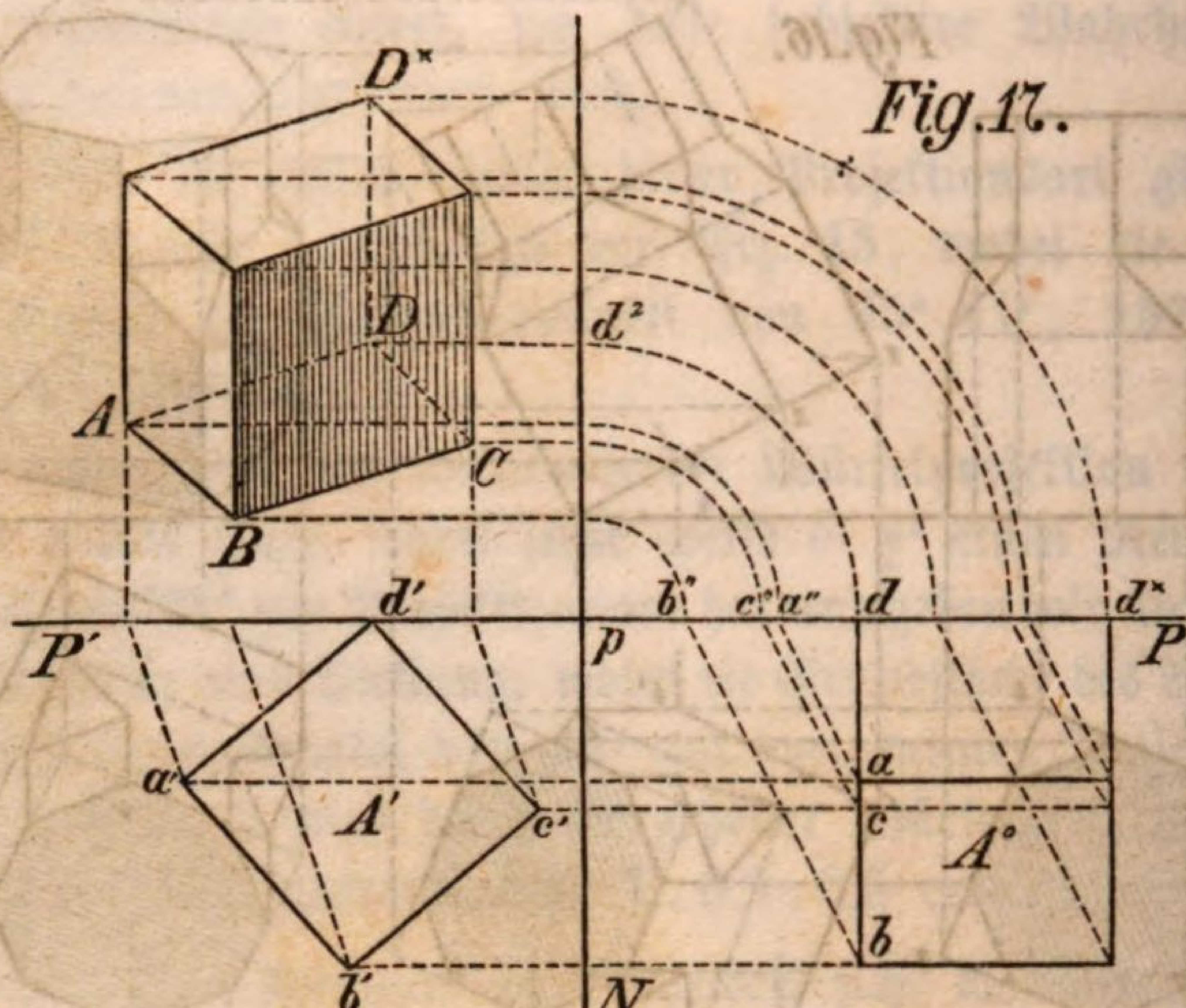


Bei der geometrischen Körperprojektion (Fig. 16) ist diese Aehnlichkeit mit dem axonometrischen Bilde ersichtlich.

B. Schräge geometrische Projektion.

31) Die schräge Projektion, welche uns ein ähnliches Bild wie die bereits erwähnten axonometrischen Projektionsweisen gibt, unterscheidet sich von diesen darin, daß hiebei die projizirenden Linien eine schräge Lage zur rechtwinkeligen Projektionsebene haben, während bei der axonometrischen Projektion dieselben rechtwinkelig auf der schiefen Projektionsebene stehen.

Hiebei nehmen wir an, es sei wie in Fig. 17 A′ der Grundriß und A° die in die horizontale Projektionsebene umgelegte Seitenansicht des Würfels und N p die Axe dieser hiezu benützten Projektionsebenen und denken uns durch die



Würfelkante D D+, deren Projektionen d′ d d+ sind, die vertikale Projektionsebene als Bildebene für die schräge Projektion, deren Axe P′ p rechtwinkelig mit N p ist.

Denken wir uns ferner aus den Eckpunkten des Würfels projizirende Linien (Projektionsstrahlen) auf diese Ebene geführt, welche parallel unter sich, jedoch schief auf derselben stehen, so bestimmen ihre Schneidpunkte mit der Bildebene die schräge Projektion des Würfels, dessen senkrechte Kanten-Projektionen in wirklicher Größe erscheinen.

Betrachtet man daher die schräge Projektion der drei zusammenstoßenden Kanten D D+, D A und D C, welche sämmtlich einander gleich sind, als Coordinatenaxen, so stellt sich immer D D+ in wirklicher Größe dar.

Statt wie hier den darzustellenden Körper vor der Bildebene anzunehmen, könnte auch derselbe hinter der Bildebene stehend gedacht werden.

32) Geben wir dem Würfel eine solche Stellung wie bei Fig. 18, wobei die Grundrißlinie a′ d′ parallel mit der vertikalen Bildebene liegt, oder auch wie hier in deren Axe

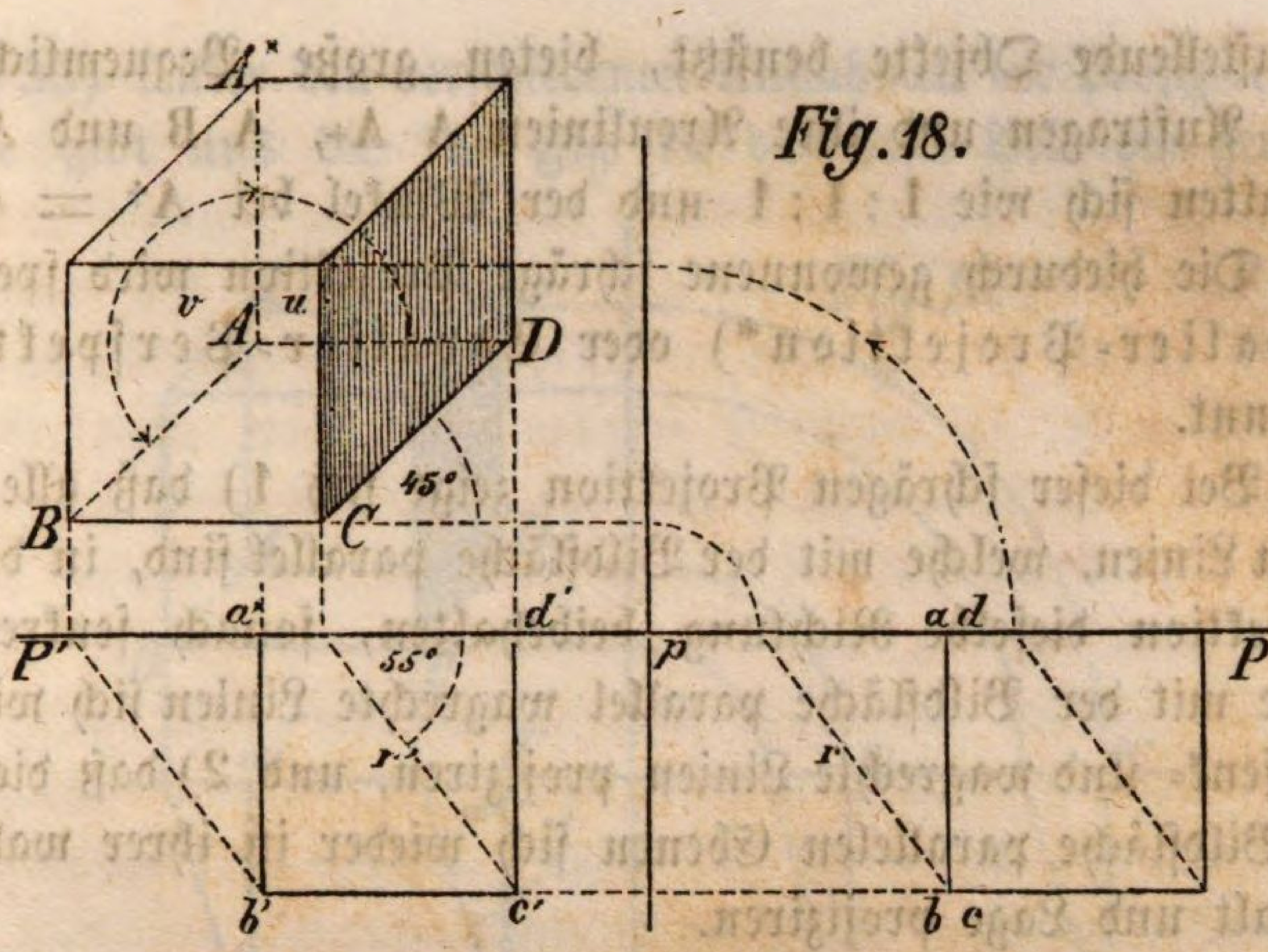


Fig. 18.

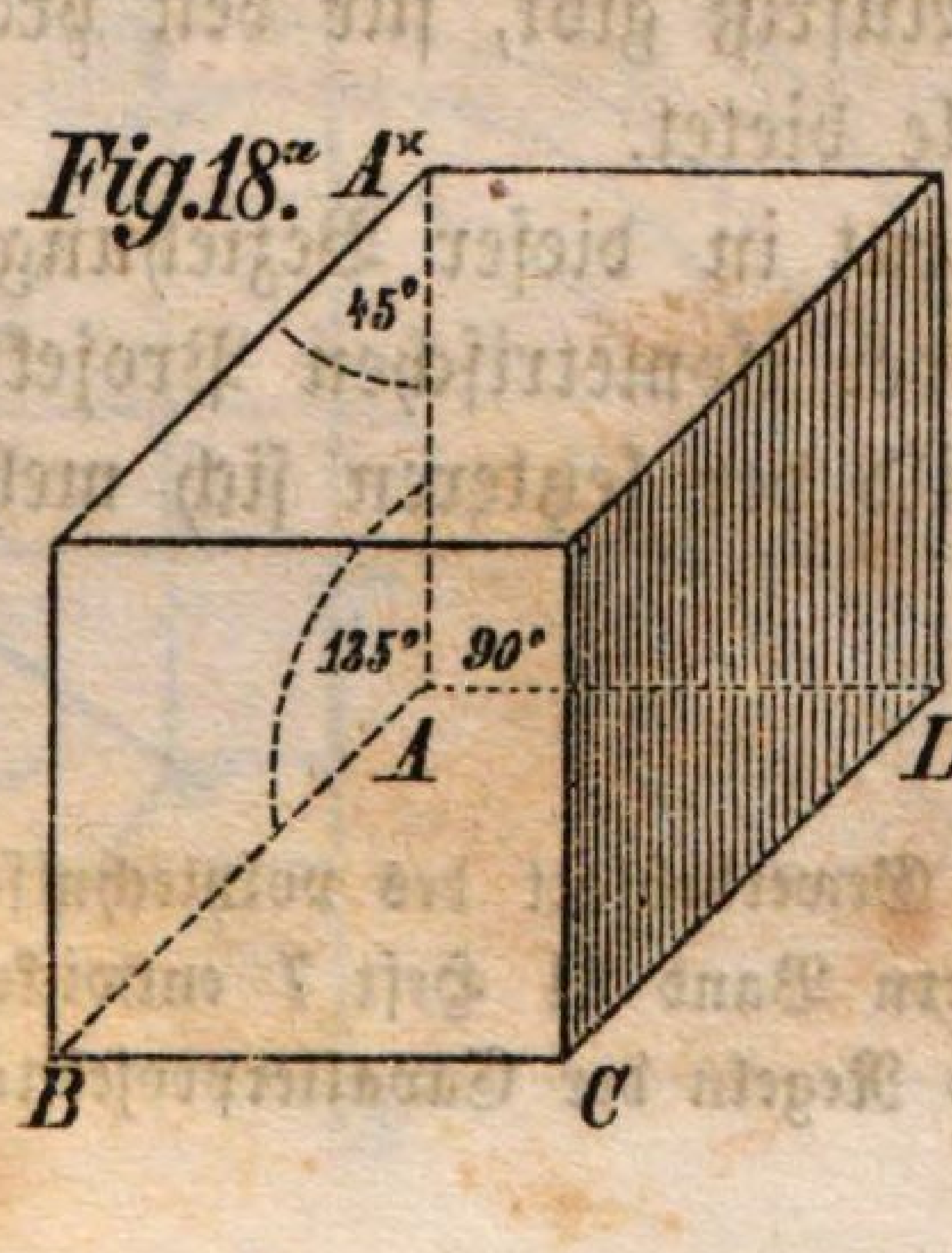
P′ p fällt, so wird in der schrägen Projektion immer die Linie A A+ = A D = 1 und der Winkel u = 1 R, während der Winkel v und die Linie A B sich nach der Winkelannahme der projizirenden Linie r′ r verschieden gestaltet.

Cavalier-Projektion.

33) Wird z. B. wie hier bei Fig. 18 die Richtung der projizirenden Linie r′ r so angenommen, daß ihre horizontale Projektion 55° und die vertikale 45° beträgt, so erscheinen diese Kantenprojektionen gleich groß und je drei bilden in ihrer Projektion an A A+ die Winkel von 90°, 135° und 45°.

Solche drei an einem Eckpunkte liegende Würfelflächen als Coordinaten- oder Projektionsebenen für andere bildlich

Fig. 18.ª



darzustellende Objekte benützt, bieten große Bequemlichkeit beim Auftragen und ihre Axenlinien A A+, A B und A D verhalten sich wie 1 : 1 : 1 und der Winkel bei A+ = 45°.

Die hiedurch gewonnene schräge Projektion wird speziell Cavalier-Projektion*) oder Cavalier-Perspektive genannt.

Bei dieser schrägen Projektion zeigt sich 1) daß alle geraden Linien, welche mit der Bildfläche parallel sind, in dieser Projektion dieselbe Richtung beibehalten, sonach senkrechte, sowie mit der Bildfläche parallel wagrechte Linien sich wieder als senk- und wagrechte Linien projiziren, und 2) daß die mit der Bildfläche parallelen Ebenen sich wieder in ihrer wahren Gestalt und Lage projiziren.

34) Vergleichen wir das Würfelbild in Fig. 17 und 18, so wird ersteres eine schräge Ansicht, letzteres eine gerade Ansicht der schrägen Projektion dieses Körpers geben.

Hiebei wird ersteres, obgleich alle drei sichtbaren Würfelflächen nicht in ihrer wirklichen Gestalt, sondern in einer gewissen Verschiebung sich zeigen, dennoch weniger gezwungen sich darstellen und einen geringeren Umfang haben als wie letzteres und überhaupt sich mehr dem Perspektivbilde nähern.

Andererseits ist auch der praktische Vorzug der geraden Ansicht der schrägen Projektion, besonders der der Cavalierprojektion nicht zu verkennen, weil nicht allein das bequeme Zeichnen der Figur, sondern auch der Umstand, daß die mit der Bildfläche parallele Seite des Gegenstandes den rein geometrischen Aufriß gibt, für den praktischen Gebrauch wesentliche Vortheile bietet.

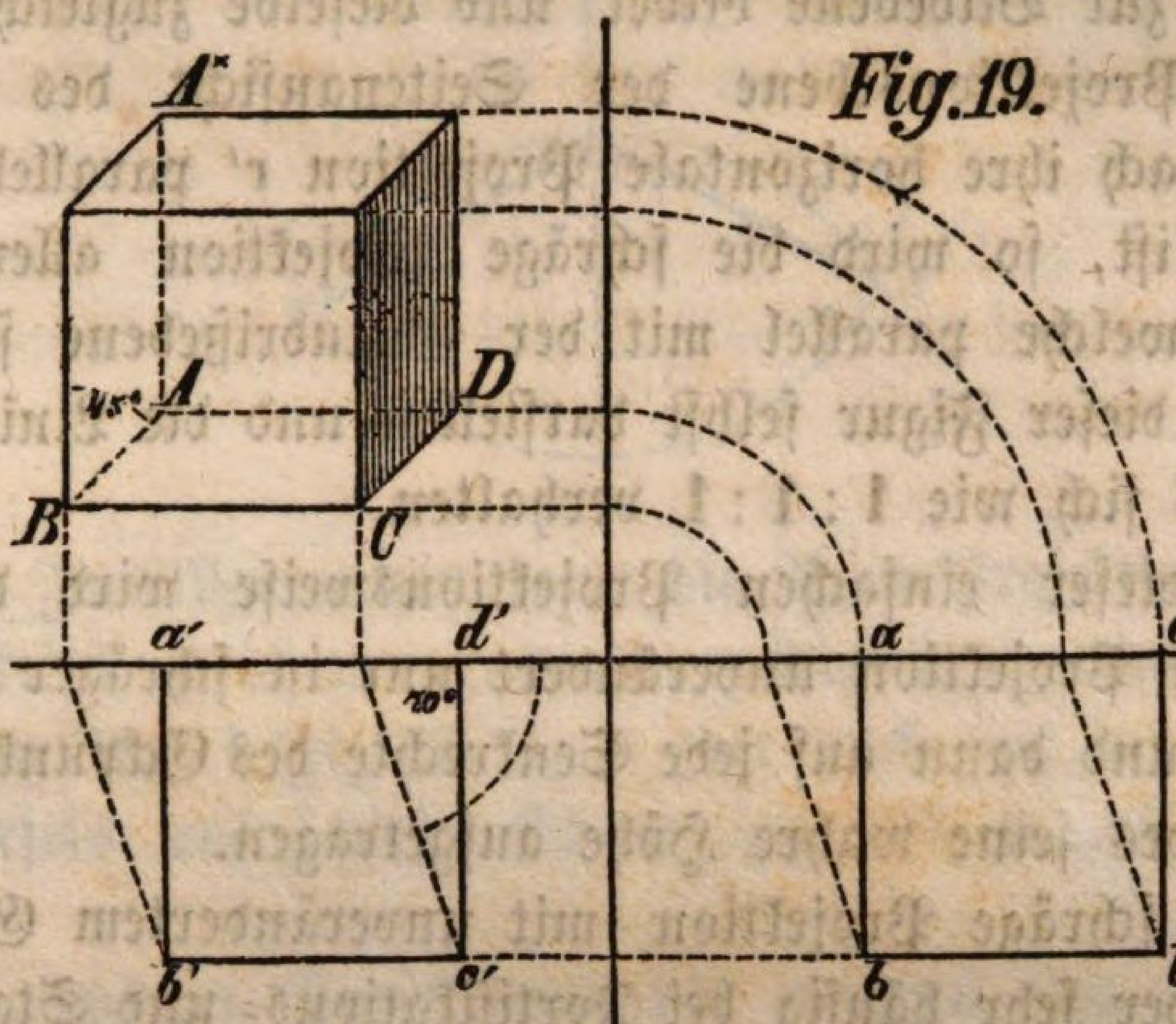
Deßhalb verdient in dieser Beziehung die Cavalierprojektion selbst vor der isometrischen Projektion den Vorzug, wenn gleich das Bild der letzteren sich mehr der scheinbaren Wahrheit nähert.

---

*) Im Kunst- und Gewerbeblatt des polytechnischen Vereins für das Königreich Bayern Band 21 Heft 7 entwickelte Prof. Haindl die Begründung und Regeln der Cavalierprojektion.

35) Unter den verschiedenen Annahmen der projizirenden Linie gibt uns die der Fig. 19 das beste Bild der geraden

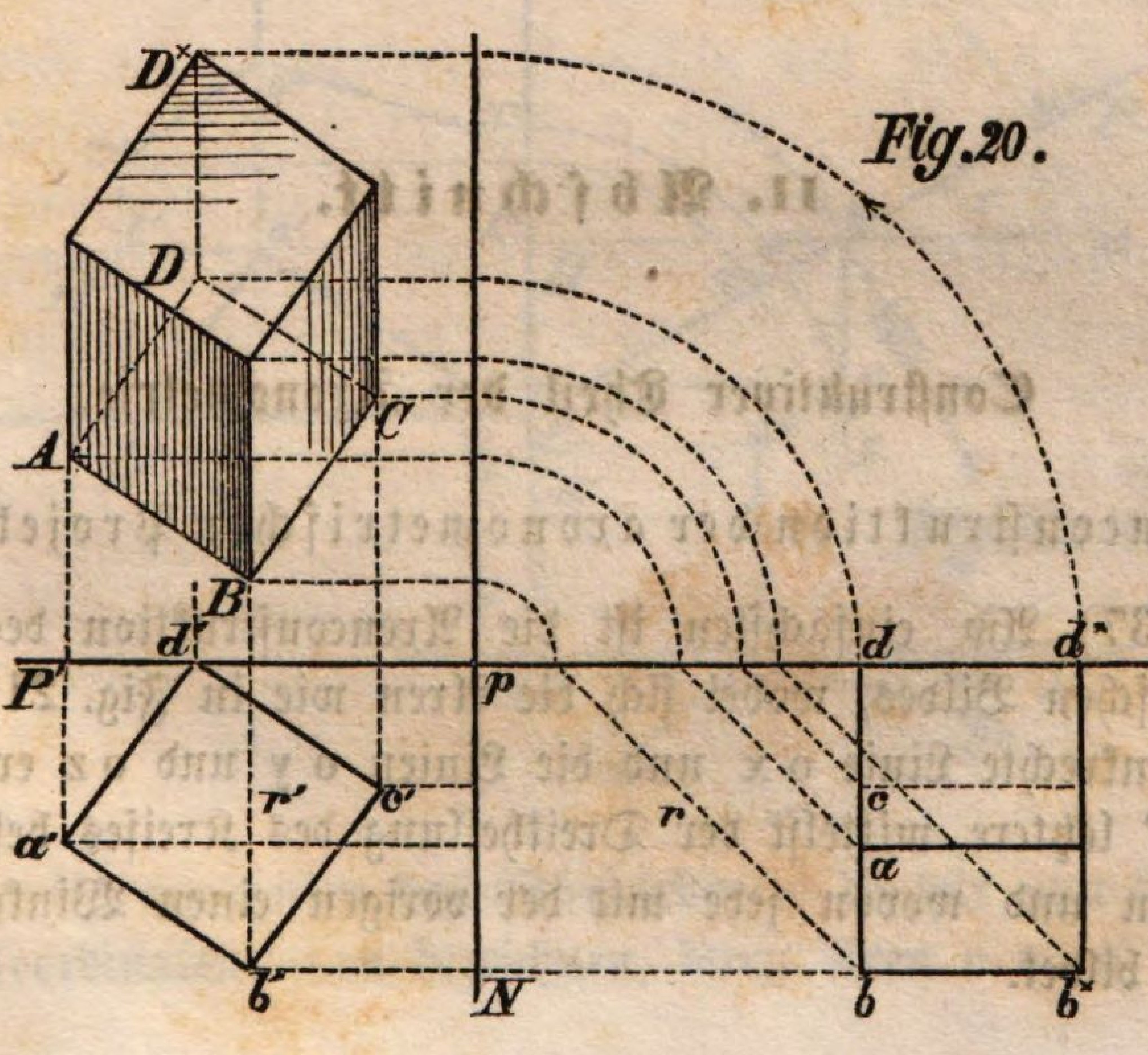
Fig. 19.



Ansicht dieser schrägen Projektion; hiebei bildet die horizontale Projektion der projizirenden Linie einen Winkel von 70° und ihre vertikale Projektion einen Winkel von 45° und verhält sich A A+ : A D : A B = 1 : 1 : 1/2 und der Winkel B = 45°.

Militär-Projektion.

Fig. 20.



36) Wird die Lage der projizirenden Linie r zur Bildebene so gedacht, daß der Neigungswinkel dieser projizirenden Linie 45° zur Bildebene bildet und dieselbe zugleich parallel mit der Projektionsebene der Seitenansicht des Würfels bleibt, sonach ihre horizontale Projektion r′ parallel mit der Axe N p ist, so wird die schräge Projektion aller ebenen Figuren, welche parallel mit der Grundrißebene sind, sich congruent dieser Figur selbst darstellen und die Linien D D+, D A, D C sich wie 1 : 1 : 1 verhalten.

Bei dieser einfachen Projektionsweise wird daher die horizontale Projektion unverändert nur in schräger Stellung gezeichnet und dann auf jede Senkrechte des Eckpunktes eines Gegenstandes seine wahre Höhe aufgetragen.

Diese schräge Projektion mit unverändertem Grundrisse wurde früher sehr häufig bei Fortifikations- und Stadtplänen angewendet und mit dem Namen Vogel- oder Militär-Perspektive bezeichnet.

II. Abschnitt.

Construktiver Theil der Axonometrie.

Axenconstruktion der axonometrischen Projektion.

37) Am einfachsten ist die Axenconstruktion des isometrischen Bildes, wobei sich die Axen wie in Fig. 21 durch die senkrechte Linie o x und die Linien o y und o z ergeben, welch' letztere mittelst der Dreitheilung des Kreises bestimmt werden und wovon jede mit der vorigen einen Winkel von 120° bildet.

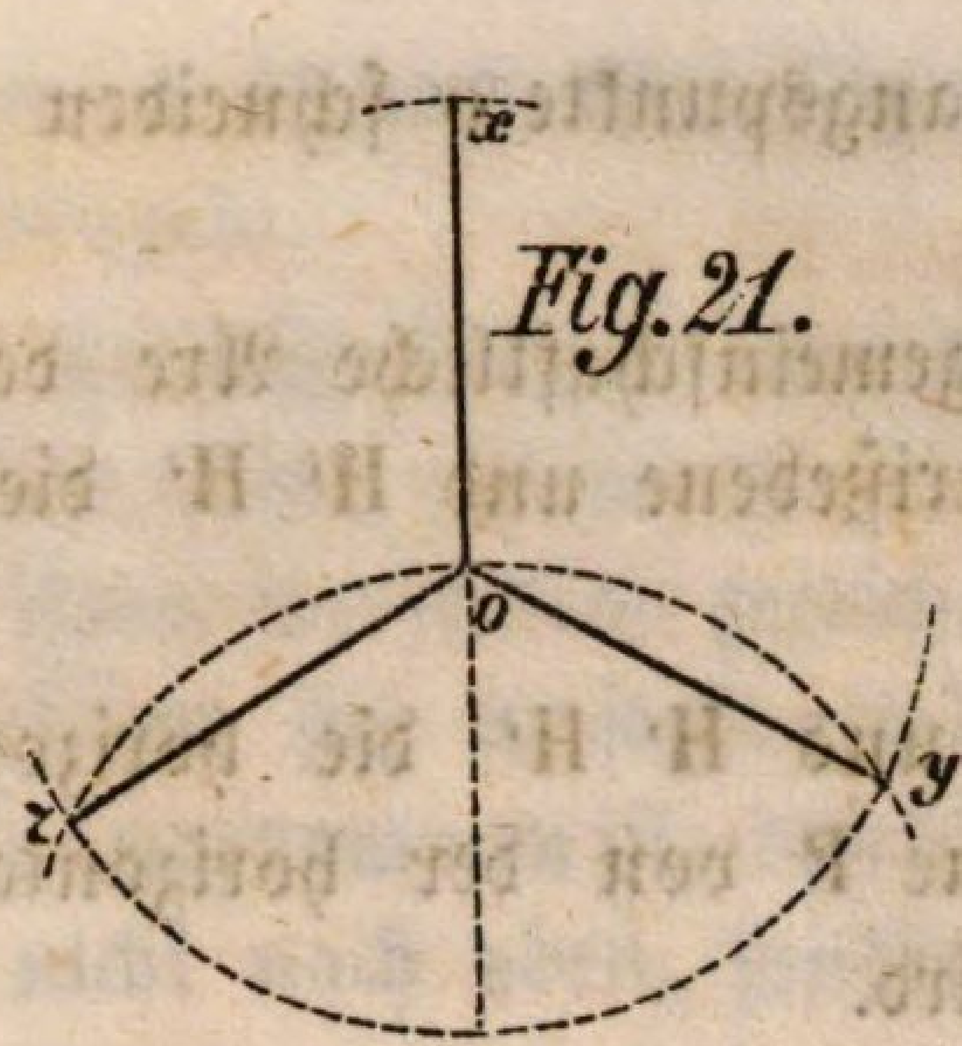


Fig. 21.

38) Im Allgemeinen kann die Axen-Projektion für eine axonometrische Zeichnung entweder aus der horizontalen Würfel-Projektion Blatt I Fig. 3, 4, 5 oder auch aus der Projektion des Würfels auf schiefer Ebene Fig. 12 und 13 ermittelt werden.

Bei letzterer Projektionsweise nehmen wir wieder an, es sei in Fig. 22, o′ y′ z′ der geometrische Grundriß und x o y z die in die Grundrißebene gelegte Seitenansicht der Axenlinien

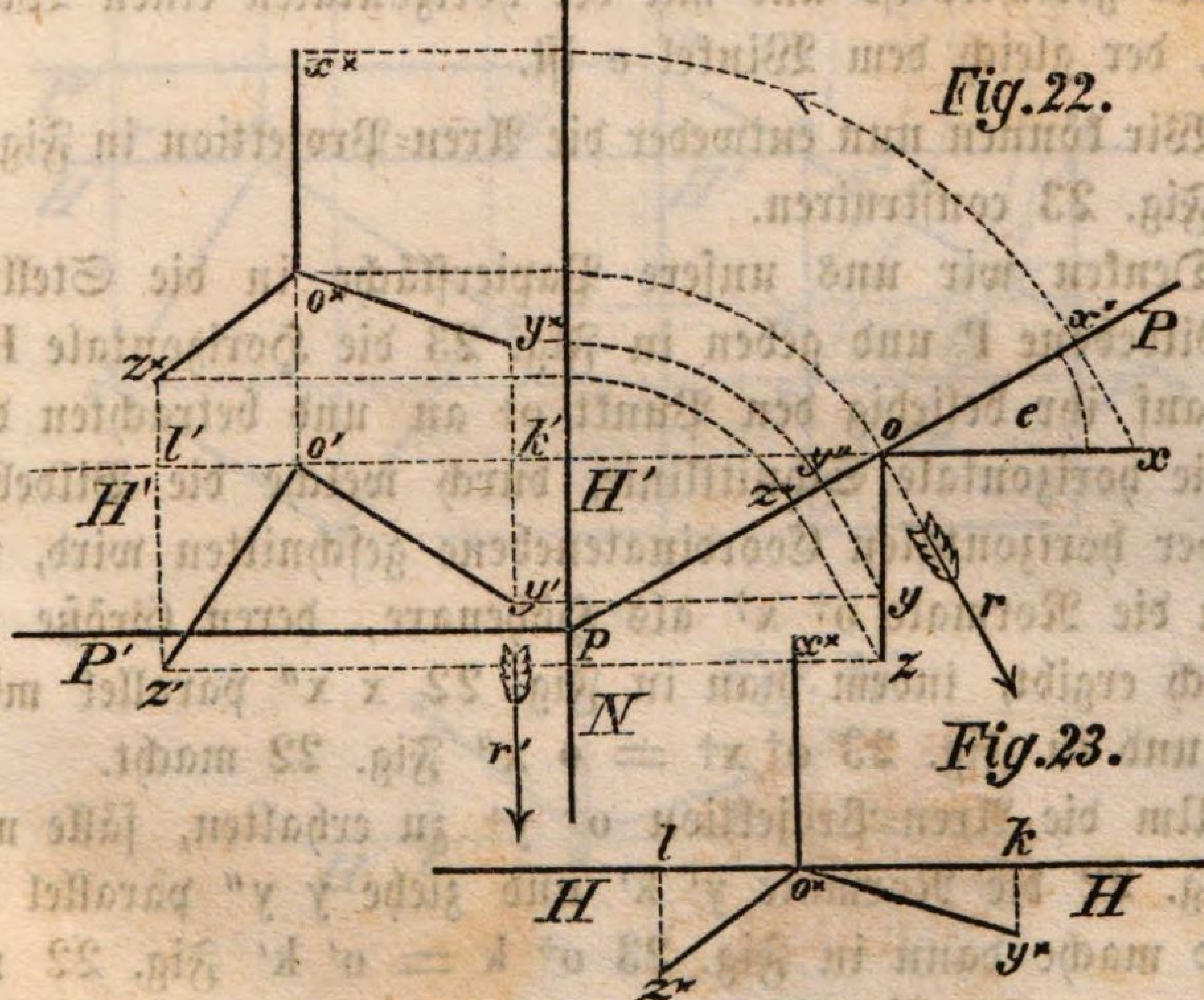


Fig. 22.

Fig. 23.

der bereits erwähnten drei Würfelebenen, die wir nun ferners als Coordinatenebenen bezeichnen, deren Axen o x, o y und

o z sich in dem Anfangspunkte o schneiden und von denen jede = 1 ist.

N H′ sei die gemeinschaftliche Axe der hiezu benützten Grund- und Seitenrißebene und H′ H′ die der Grund- und Aufrißebene.

Zugleich gibt uns H′ H′ die horizontale Linie, nach welcher die Bildebene P von der horizontalen Coordinatenebene geschnitten wird.

Ferners seien P′ p P die Spuren der durch den Punkt o gelegten schrägen Bildebene, wovon deren horizontale Spur P′ p parallel mit H′ H′ und die Spur p P die in die horizontale Projektionsebene umgelegte Seitenansicht dieser Bildebene wäre, woraus sich der Winkel e ergibt, den die Höhenaxe o x mit der Bildebene P bildet.

Denken wir uns eine projizirende Linie normal auf die Bildebene, deren Projektionen r′ und r sind, so wäre dieß die Beobachtungslinie, welche nach dem Standorte des Beschauers gerichtet ist und mit der horizontalen einen Winkel bildet, der gleich dem Winkel e ist.

Wir können nun entweder die Axen-Projektion in Fig. 22 oder Fig. 23 construiren.

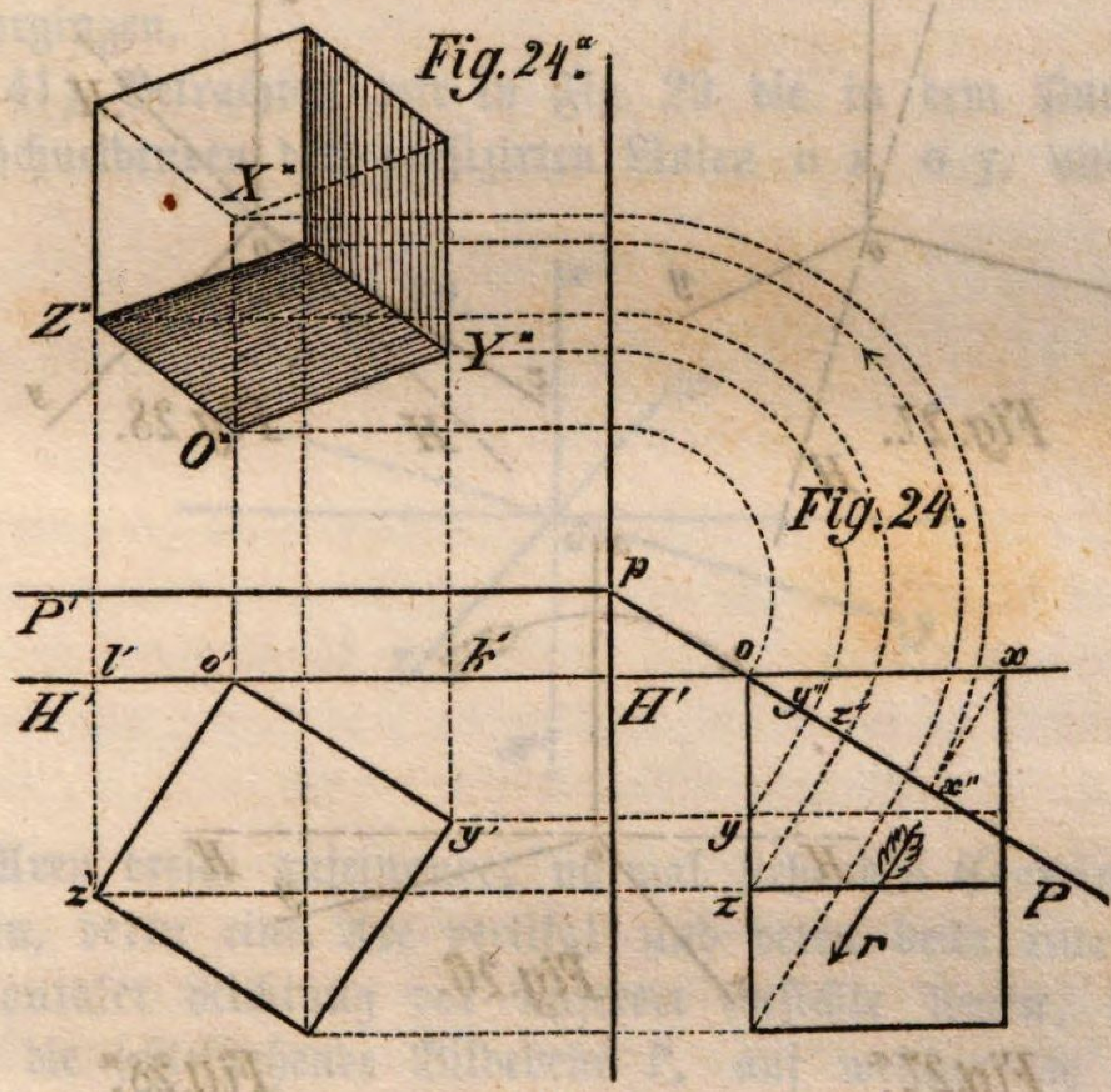
Denken wir uns unsere Papierfläche in die Stellung der Bildebene P und geben in Fig. 23 die Horizontale H H und auf ihr beliebig den Punkt o+ an und betrachten diese als die horizontale Schnittlinie, durch welche die Bildebene von der horizontalen Coordinatenebene geschnitten wird, und ziehen die Normale o+ x+ als Höhenaxe, deren Größe sich dadurch ergibt, indem man in Fig. 22 x x″ parallel mit r zieht und in Fig. 23 o+ x+ = o x″ Fig. 22 macht.

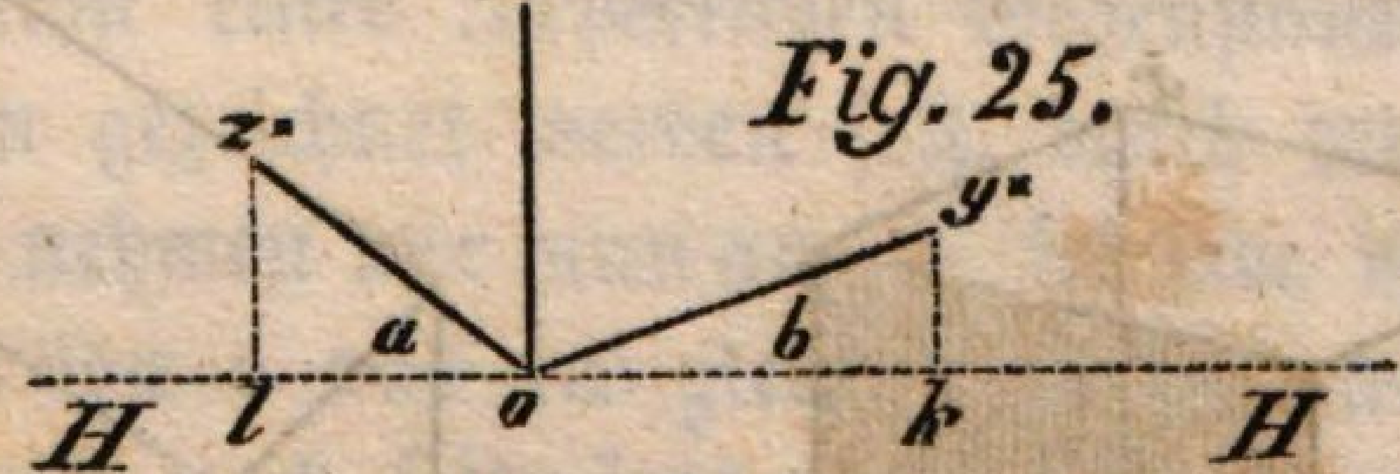
Um die Axen-Projektion o+ y+ zu erhalten, fälle man in Fig. 22 die Normale y′ k′ und ziehe y y″ parallel mit r und mache dann in Fig. 23 o+ k = o′ k′ Fig. 22 und k y+ = o y″ Fig. 22.

Ebenso ergibt sich die Axe o+ z+ Fig. 23 durch die Normale z′ l′ und durch die mit r gezogene Parallele z z″

Fig. 22, wovon wir $o' l'$ nach $o^+ l$ Fig. 23 und $o z''$ nach $l z^+$ Fig. 23 übertragen.

39) Bei der Axen-Projektion Fig. 22 befindet sich das Auge des Beschauers höher als der Anfangspunkt o, wodurch ein mittelst dieser Axen-Projektion gezeichneter Körper gleichsam von oben gesehen sich darstellt, während bei Fig. 24, wo die Bildebene so angenommen ist, daß die Beobachtungslinie r sich von o aus nicht nach oben, sondern nach unten zieht,





wobei der Punkt o höher als das Auge des Beschauers liegt, und sonach die axonometrische Projektion eines Körpers von unten gesehen sich zeigt.

Vergleiche die Projektion des Würfels in Fig. 13 mit Fig. 24a.

Diese untere axonometrische Projektion wird jedoch weniger angewendet als wie die erstere, auch unterscheidet sich die Construktion ihrer Axen-Projektion Fig. 25 nur in soferne von der ersten, als man dabei die die Winkel a und b bestimmenden Normalen k y^+ und l z^+ nicht unterhalb, sondern oberhalb H H aufzutragen hat.

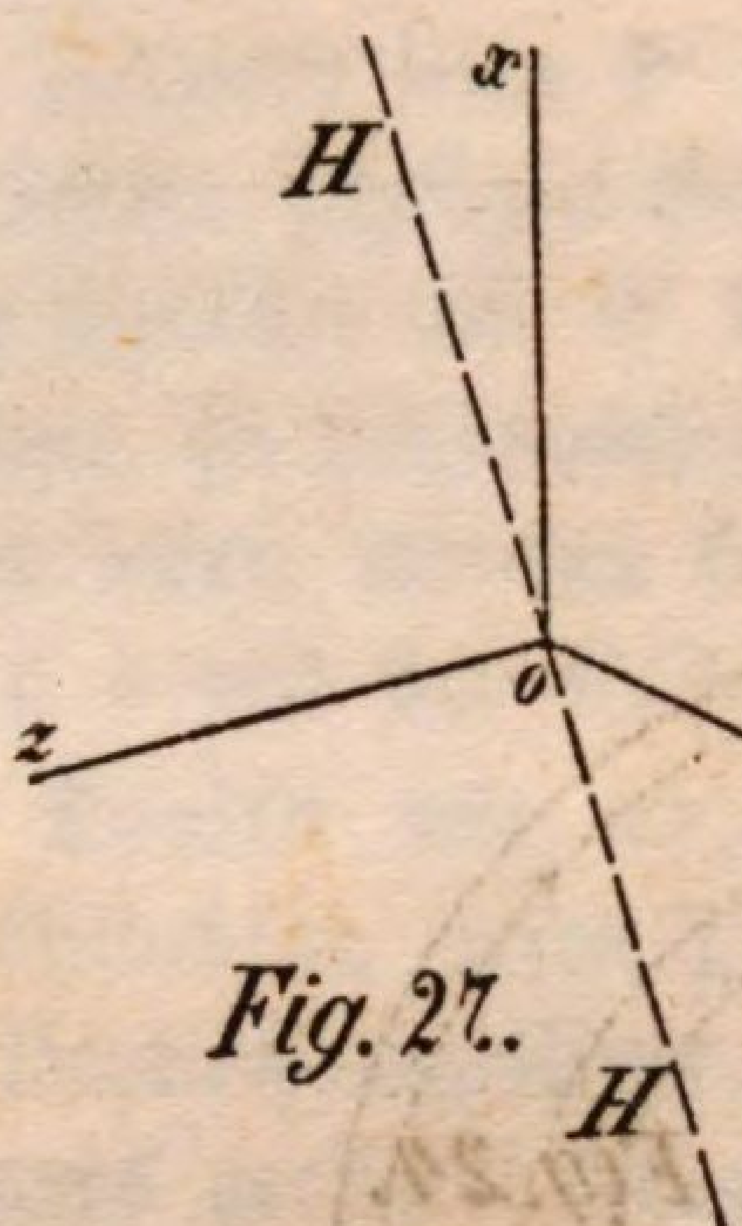


Fig. 27.

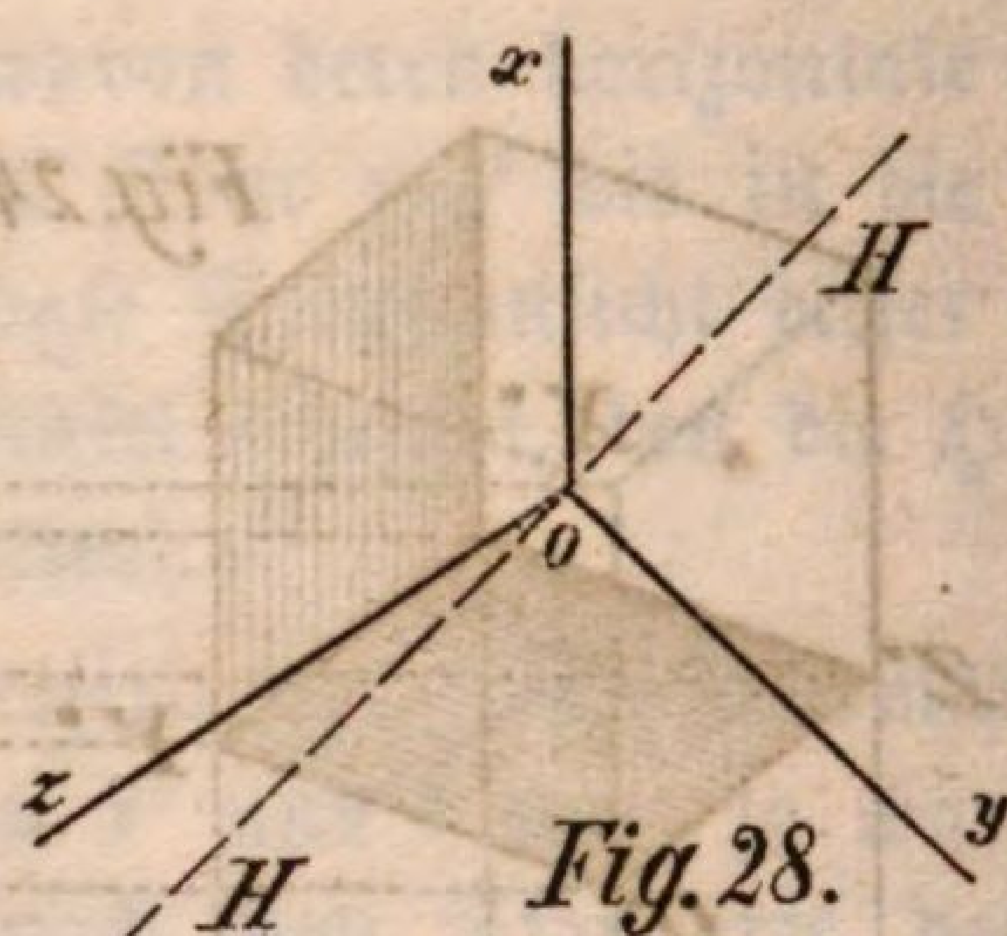


Fig. 28.

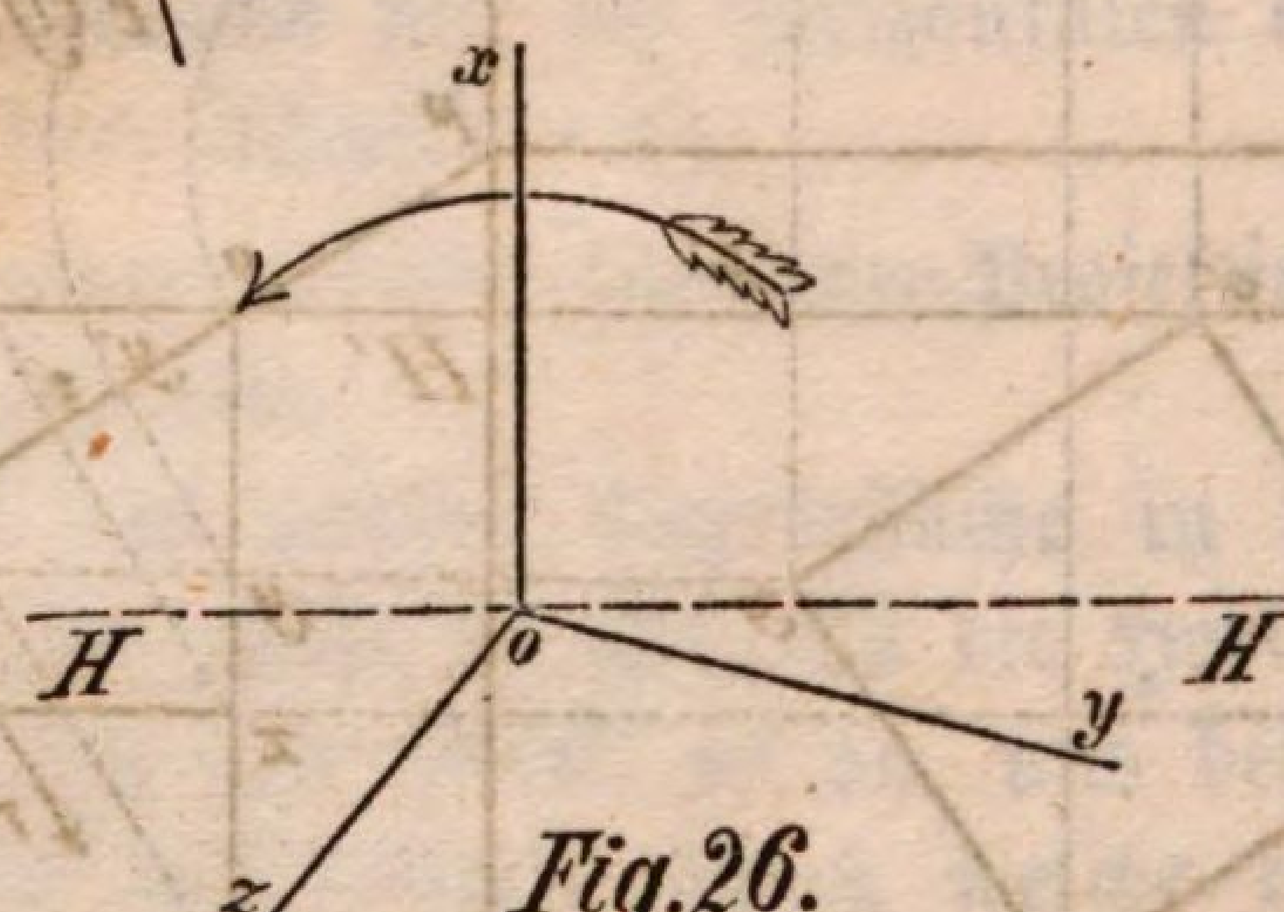


Fig. 26.

Fig. 27.a

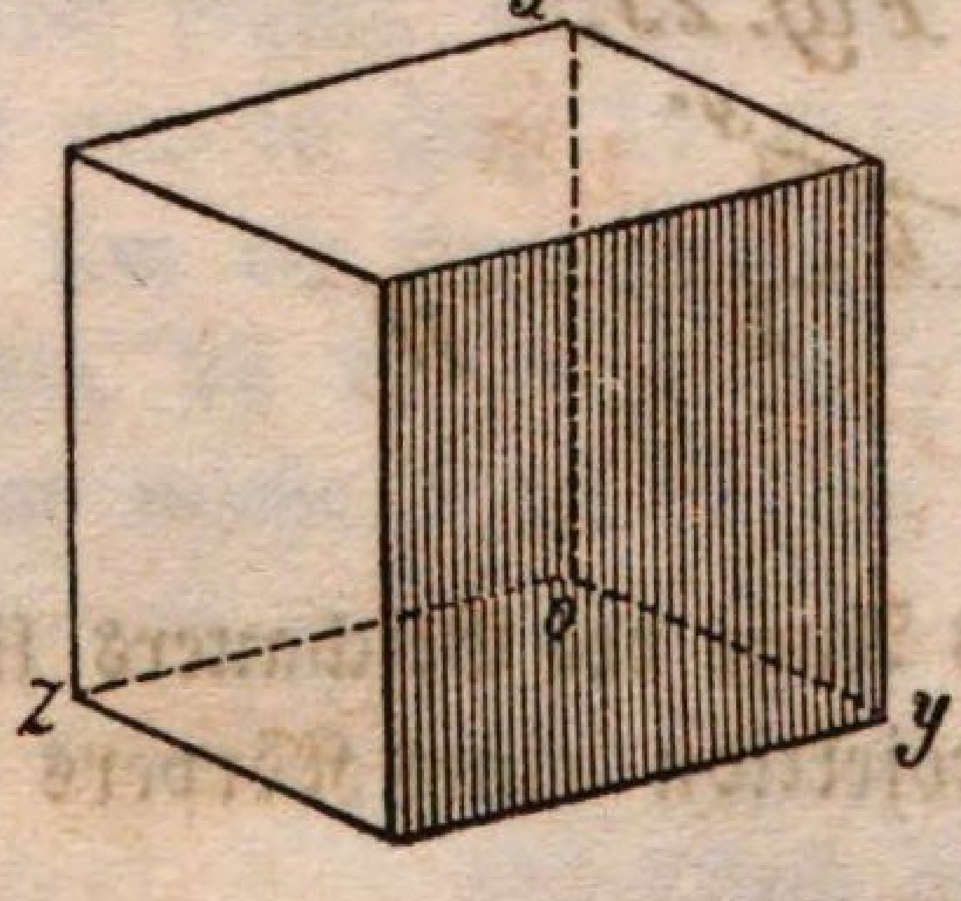
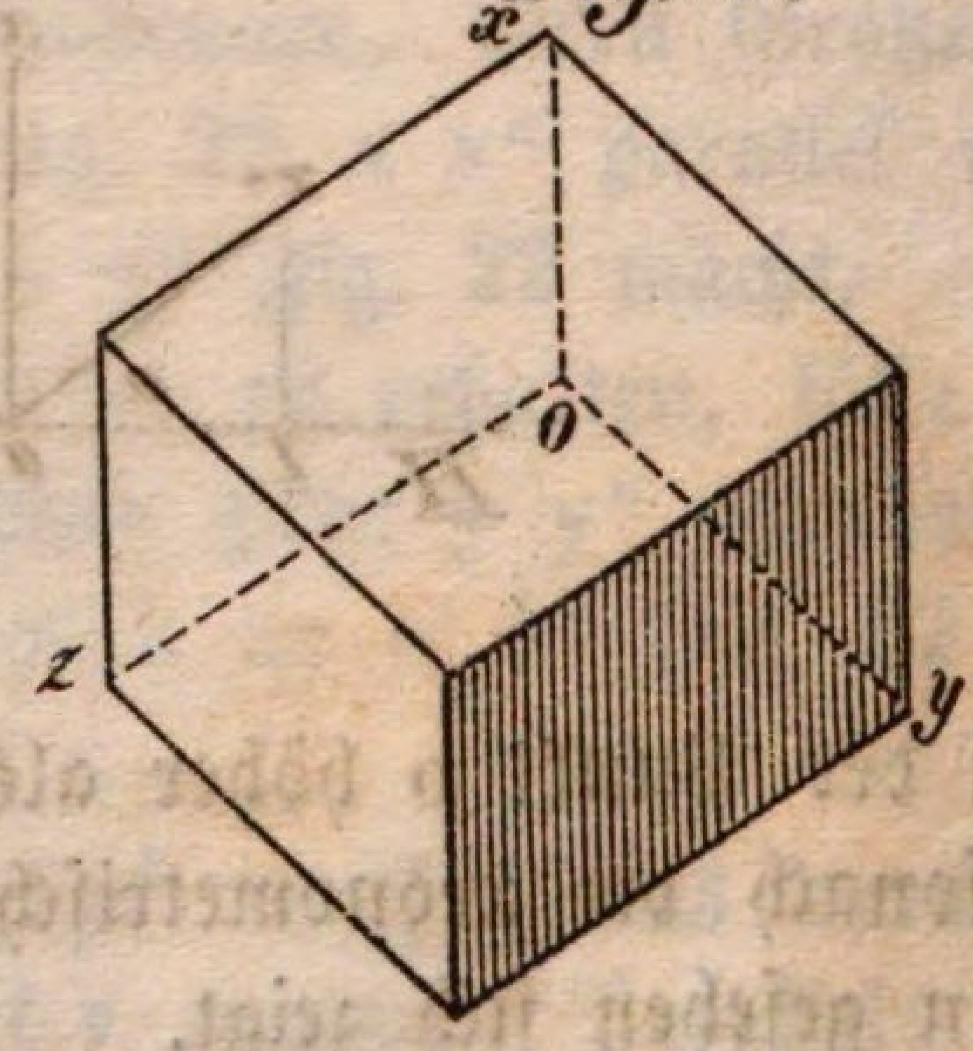


Fig. 28.a

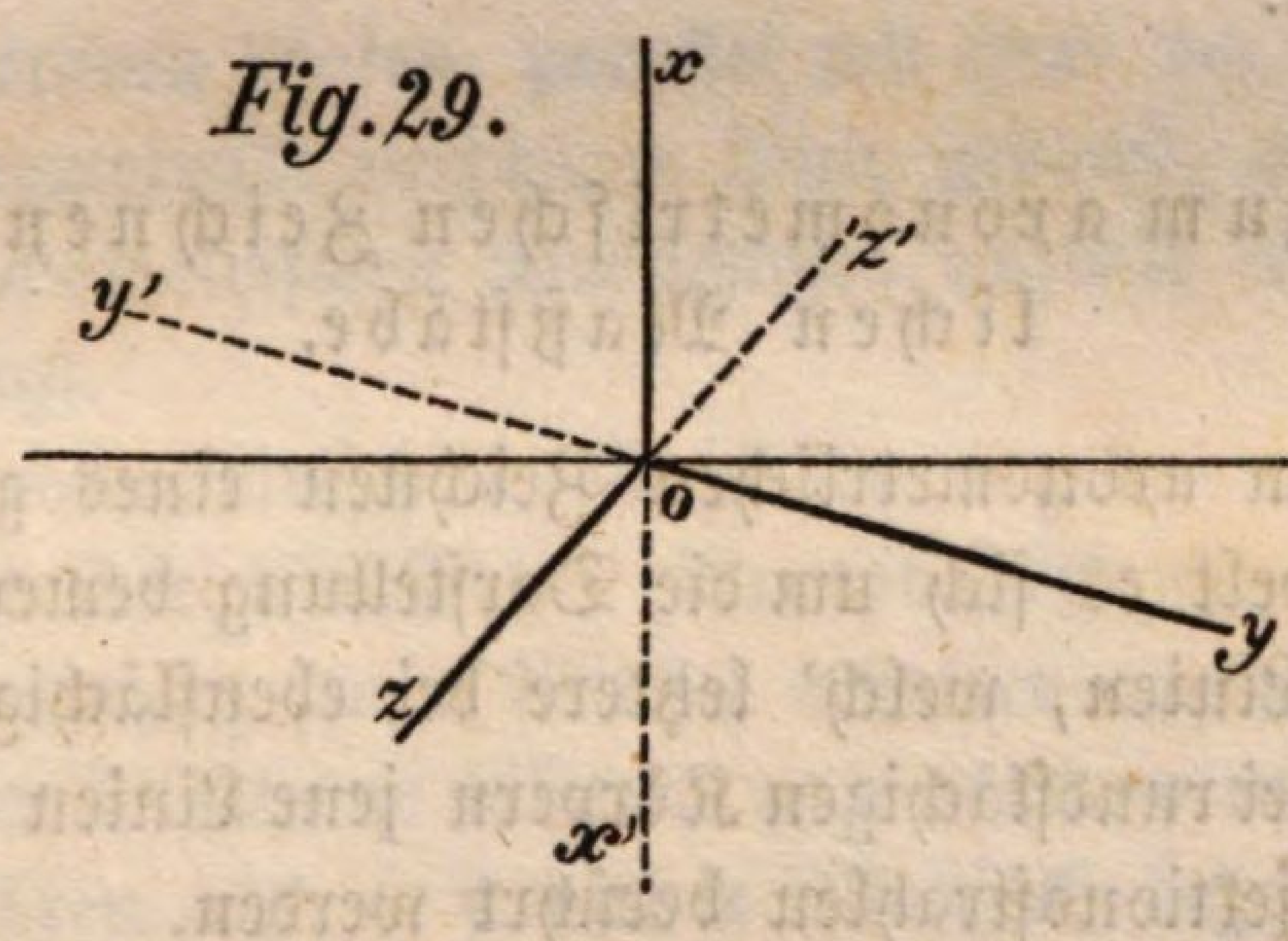


40) Jede der drei Axen-Projektionen kann auch als Höhenaxe betrachtet werden, wobei dieselben eine andere Lage auf dem Papiere einnehmen, ohne daß hiedurch die Größe der einzelnen Axen eine Veränderung erleidet.

Denken wir uns z. B. die Axenprojektion Fig. 26 mit der Bildebene fest verbunden und in der Richtung des Pfeiles um den Punkt o so gedreht, daß die y Axe, und das anderemal, daß die z Axe in der Richtung der x Axe kommt, so ergeben sich hieraus die Axenprojektionen der Fig. 27 und 28, aus denen die zwei verschiedenen Projektionen Fig. 27a und 28a hervorgingen.

41) Betrachten wir in Fig. 29 die in dem Punkte o sich schneidenden drei projizirten Linien o x, o y, und o z

Fig. 29.



als Axen dreier aufeinander normal stehenden Coordinatenebenen, deren eine Axe vertikal und deren beide andere in horizontaler Richtung vor unserem Gesichte liegen, wobei man die schiefstehende Bildebene P, auf welcher die rechtwinkelige Projektion eines körperlichen Gegenstandes mittelst obiger Axenlinien gezeichnet werden soll, durch den Punkt o gelegt denkt und nehmen wir nun an, es sei jede der drei Coordinatenebenen von o aus in gleicher Größe nach unten, nach rückwärts und nach seitwärts verlängert, so werden dieselben den Raum in acht und der Punkt o jede Coordinatenaxe in zwei Theile theilen, wovon jeder durch drei Coordinatenebenen begrenzte Raum ein Quadrant heißt, welcher wie die in demselben liegenden Axen bezeichnet wird.

Demnach wird z. B. ein Körper in dem x z' y Quadranten liegen, wenn derselbe in dem oberen, hinteren rechten Quadranten sich befindet.

Für die axonometrische Zeichnung können nun beliebig mehrere dieser Quadranten oder auch bloß einer nur benützt werden, was beim Zeichnen des axonometrischen Bildes näher erläutert werden wird.

So bezeichnen wir auch x x' als Höhenaxe, y y' als Längenaxe und z z' als Breitenaxe. Jene durch den Punkt o gehende Coordinatenebene, auf welcher die Höhenaxe x x' normal steht, heißt x Ebene, die, auf welcher die Längenaxe y y' normal steht, die y Ebene und endlich jene, auf welcher die Breitenaxe z z' normal steht, die z Ebene.

Ueber die zum axonometrischen Zeichnen erforderlichen Maßstäbe.

42) Beim axonometrischen Zeichnen eines geometrischen Körpers handelt es sich um die Darstellung bemerkenswerther Punkte und Linien, welch' letztere bei ebenflächigen Körpern die Kanten, bei rundflächigen Körpern jene Linien sind, welche von den Projektionsstrahlen berührt werden.

Die Darstellung von Punkten kann nun aus den Maßstäben ihrer axonometrischen Coordinaten ermittelt werden, ebenso kann für die axonometrische Projektion gerader Linien, deren Lage bekannt ist, die Größe derselben aus den Maßstäben entnommen werden.

Bei der angenommenen Stellung der drei Coordinatenebenen und der durch den Punkt O gelegten Bildebene kann nun eine gerade Linie dreierlei Lagen im Raume einnehmen, nämlich sie kann

1) parallel mit der Bildebene,
2) parallel mit einer der Coordinatenaxen, und
3) weder parallel mit der Bildebene noch parallel mit einer der Coordinatenaxen sein.

43) Ist die gerade Linie parallel mit der Bildebene, so stellt sie sich (wie dieß auch bei der geometrischen Zeichnung geschieht) in ihrer wirklichen (geometrischen) Größe dar, und heißt geometrische Linie.

Dieselbe kann dann nach ihrem geometrischen Maßstabe, oder wenn derselbe verjüngt ist, in ihrem geometrisch verjüngten Maßstabe dargestellt werden.

44) Gerade Linien, welche parallel mit einer der Coordinatenaxen sind, haben dasselbe Verjüngungs-Verhältniß wie die mit ihnen parallele Coordinatenaxe, so daß der für diese Axe zu bildende axonometrische Maßstab zugleich der Maßstab für diese mit ihr parallelen axonometrischen Linien ist.

Diese geraden Linien, parallel mit einer der Coordinatenaxen, als geometrisch verjüngte Linie gedacht, werden sonach in ihrer axonometrischen Darstellung zugleich auch axonometrisch verjüngt.

Die axonometrischen Maßstäbe ergeben sich aus dem Verjüngungs-Verhältniß der Axenprojektion, oder können durch Construirung jener Winkel erhalten werden, welche die Axen mit der Bildebene bilden, und werden nach ihren zugehörenden Axen als x, y und z Maßstab bezeichnet.

45) Alle geraden Linien, welche weder parallel mit der Bildebene, noch parallel mit einer der Coordinaten-Ebenen sind (als geometrisch verjüngte Linien gedacht), stellen sich wegen ihrer Lage zur Bildebene axonometrisch doppelt verjüngt dar.

Die Ermittlung der wahren Länge dieser axonometrischen Linien findet sich im III. Abschnitte beim Entnehmen der Maße aus der axonometrischen Projektion erläutert.

46) Wie bereits erwähnt wurde, werden jene Linien, welche mit der Bildebene parallel sind, oder in derselben liegen, in ihrer wahren Größe erscheinen, und können als geometrische Linien nach dem geometrischen Maßstabe gemessen werden.

Eine derartig in der Bildebene liegende Linie wäre in Fig. 30 die auf der Projektion der x Axe normalstehende

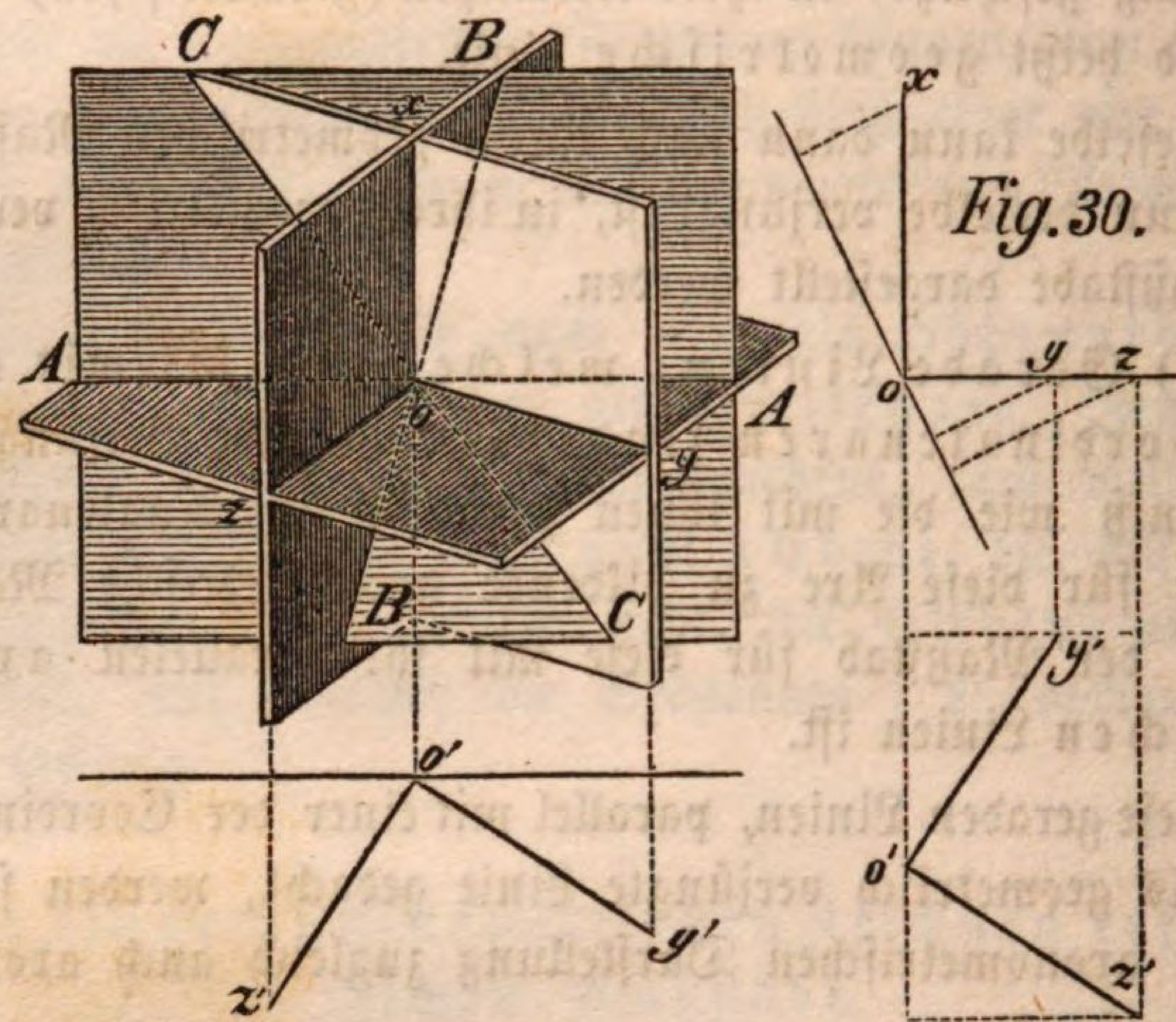


Fig. 30.

Gerade A A, durch welche die Bildebene von der x Ebene geschnitten wird.

Desgleichen sind auch B B und C C, wovon erstere normal mit der y Axe und letztere normal mit der z Axe ist, geometrische Durchschnittslinien, durch welche die Bildebene von der y und z Ebene geschnitten wird.

Da ferners die Projektionen paralleler Linien auch in der Projektion parallel bleiben, und gleiche Längen solcher Linien sich gleich groß darstellen, so werden die axonometrischen Projektionen jener Linien, welche parallel mit A A, B B, C C sind, auch als geometrische Linien zu betrachten sein, deren Größe aus dem geometrischen Maßstabe zu entnehmen ist.

47) Um die Funktion des Winkelmaßstabes, der beim Zeichnen der axonometrischen Linien in Anwendung kommt, anschaulich zu machen, denke man eine der projizirenden Ebenen der Axen, z. B. die der Axe O x in die Papierebene gelegt, Fig. 31, und die Linie O E gleich der Einheit.

Wird nun aus E ein Projektionsstrahl normal auf die Bildebene geführt, so wird der Winkel bei E gleich dem Nei=

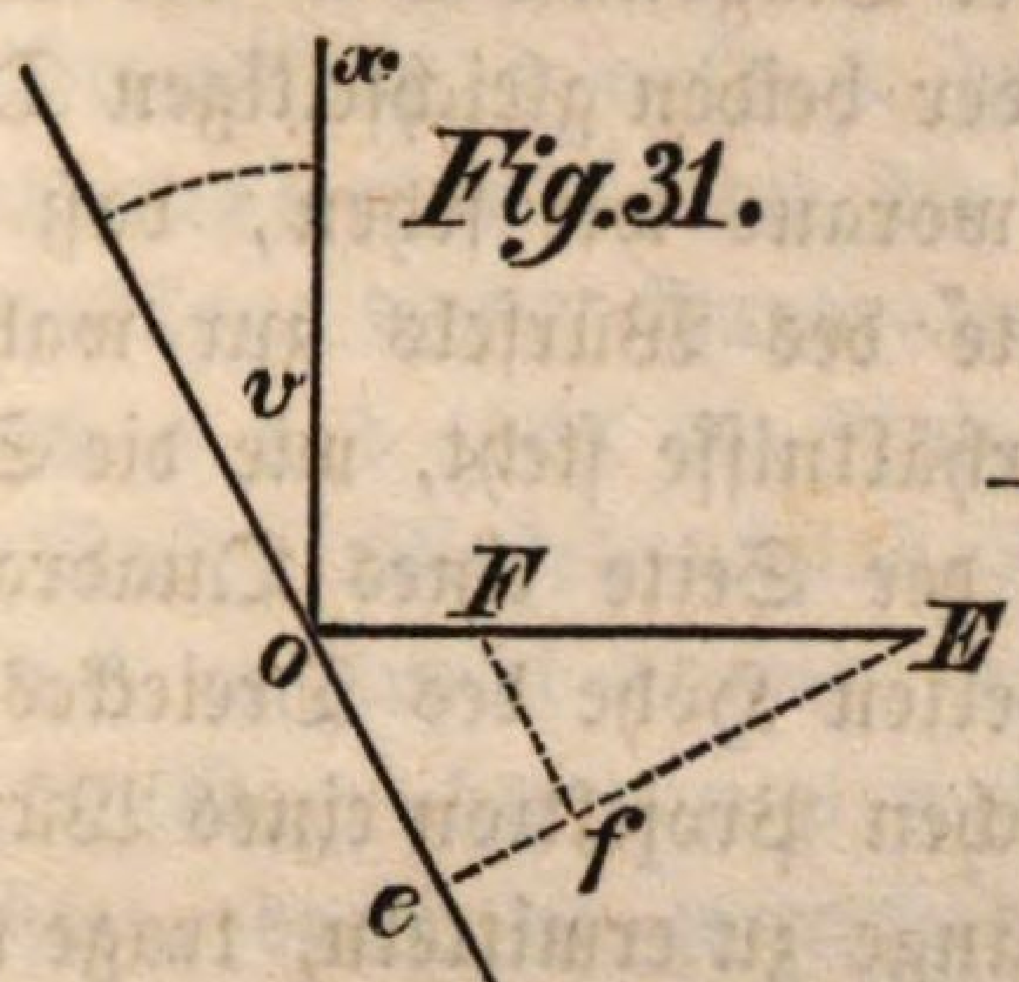


Fig. 31.

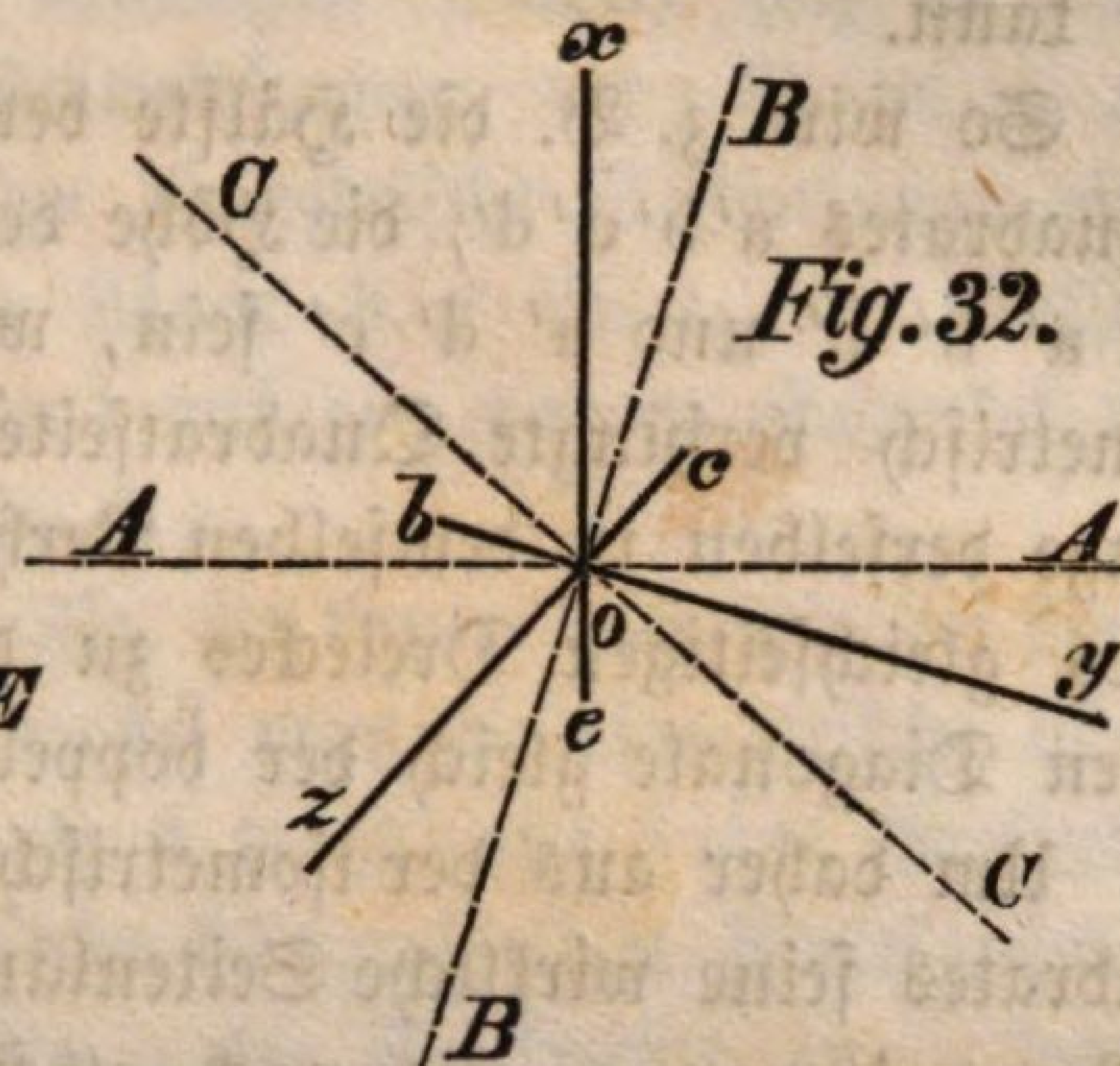


Fig. 32.

gungswinkel v der Axe O x zur Bildebene sein, wodurch sich auf letzterer die Projektion O e der Linie O E ergibt.

Tragen wir auf den Schenkel O E dieses Winkels das geometrische Maß einer Linie z. B. E F und fällen von F aus eine Normale auf den andern Schenkel E e, so erhalten wir in F f die Größe für die axonometrische Projektion der Linie E F.

Zugleich zeigt sich in Fig. 32, daß die Projektion O e der Linie O E in der Verlängerung der x Axe liegt, indem die projizirende Ebene der x Axe mit der der Linie O E zusammenfällt, wobei auch die Linie O e normal auf der Linie A A steht.

Ebenso liegen auch die Projektionen der Linie O b und O c in der Verlängerung der y und z Axe, wobei O b normal mit B B und O c normal mit C C ist.

Construktion des isometrischen Maßstabes.

48) Das Verjüngungs=Verhältniß der Axenprojektion ergibt sich für den isometrischen Maßstab aus folgendem:

Betrachten wir nämlich in Fig. 3 Blatt I die horizontale Projektion der drei als Raute sich gestaltenden Quadrate

des Würfels, so zeigen sich ihre wagrecht liegenden Diagonalen b'd', d'e' und e'b' in wahrer Größe, aus der die wahre Größe dieser Quadratseiten mittelbar abgeleitet werden kann.

So wird z. B. die Hälfte der Diagonale b'd' des Würfelquadrates a'b'c'd', die Höhe der beiden gleichseitigen Dreiecke a' b' c' und a' d' c' sein, woraus wir sehen, daß jede isometrisch verjüngte Quadratseite des Würfels zur wahren Länge derselben in demselben Verhältnisse steht, wie die Seite eines gleichseitigen Dreieckes zu der Seite eines Quadrates, dessen Diagonale gleich der doppelten Höhe des Dreieckes ist.

Um daher aus der isometrischen Projektion eines Würfelquadrates seine wirkliche Seitenlänge zu ermitteln, trage man z. B. m d' von m aus nach c'' über, wodurch wir in d' c'' die wahre Länge hievon erhalten.

Es wäre demnach die Linie d' c'' in dem verjüngten geometrischen Maßstabe die wirkliche Seitenlänge eines Würfelquadrates und d' c' die isometrisch verjüngte Länge dieser Linie.

In demselben Verhältnisse verjüngt sich auch die isometrische Projektion der Axenlinien der drei Würfelquadrate, welche als isometrische Coordinaten- oder Projektions-Ebenen gedacht werden, und da nun alle geraden Linien, welche mit diesen Axenlinien parallel sind, sich wieder in dem gleichen isometrischen Verhältnisse verjüngt darstellen, so kann der aus den Axenlinien hervorgegangene Maßstab auch für jene parallelen Linien benützt werden.

49) 1. Aufgabe.

Die geometrische Entfernung p° p', p° p'' und p''' p' eines Punktes P im Raume von drei senkrecht aufeinander stehenden Projektionsebenen ist in Fig. 6ª Blatt I gegeben; man soll die isometrische Projektion dieses Punktes construiren.

Lösung.

Ebenso wie bei Fig. 3 Blatt I wird hier in Fig. 6ᵇ Blatt I das Verjüngungsverhältniß für den isometrischen

Maßstab durch das gleichseitige Dreieck a, b, c bestimmt, dessen Höhe b m man von m aus nach c′ trägt, und dann den Maßstab in folgender Weise construirt:

Man zeichnet einen beliebigen Winkel Fig. 6[c] und trägt auf dessen einen Schenkel von der Spitze o aus die Dreieckseite b c (d. i. die isometrische Seitenlänge eines Quadrates) nach d und die Länge b c′ (d. i. die wirkliche Seitenlänge dieses Quadrates) auf den andern Schenkel von o nach e und zieht die Linie d e.

Dieser Winkelmaßstab Fig. 6[c] kann auch wie bei Nr. 1 Blatt I construirt werden, wobei man die isometrische Länge auf die Wagrechte von o nach d trägt, aus d eine Senkrechte errichtet, dann die geometrische Länge in den Zirkel nimmt, und hiemit aus dem Punkte o die Senkrechte in e durchschneidet, wodurch wir denselben Winkel erhalten, den die Axen mit der Bildebene bilden.

Werden alsdann aus Fig. 6[a] Blatt I die Längen p° p′, p° p″ und von p‴ p′ aus auf den Schenkel o e in 1, 2, 3 aufgetragen und aus diesen Punkten 1, 2, 3 Parallele mit d e geführt, so erhalten wir auf dem Schenkel o d in o I, o II und o III die isometrisch verjüngten Längen, wovon o I und o III auf die Coordinatenaxe o z und o y in o I und o III übergetragen, dann aus I und III eine Parallele mit der Axe y und z geführt und auf die Senkrechte des Punktes p′ die Länge o II gebracht wird, woraus die isometrische Projektion des Punktes P hervorgeht, bei der p′ der isometrische Grundriß, p″ der Aufriß und p‴ die isometrische Seitenansicht desselben ist.

Hiebei sind P p′, P p″ und P p‴ als die projizirenden Linien in Bezug auf die drei Coordinatenebenen, die Punkte p′, p″, p‴ aber als die Projektionen des Punktes P auf den Coordinatenebenen zu betrachten, welch' letztere jedoch selbst wieder auf unserer Bildebene projizirt wurden.

Statt dieses verjüngten Maßverhältnisses könnte man hier bei der isometrischen Projektion auch unmittelbar die durch die geometrische Projektion gegebenen Coordinaten p° p′, p p″ und p‴ p′ des Punktes P auf die isometrischen

Axen übertragen, was auch der Einfachheit wegen beim praktischen Zeichnen meistens geschieht und wodurch sich eine ganz ähnliche isometrische Darstellung, jedoch im umgekehrten Verhältnisse, nämlich eine vergrößerte Darstellung ergibt, welche das Bequeme hat, daß alle Größenverhältnisse jener mit den drei Coordinatenebenen parallelen Linien nach dem Maßstabe ihrer geometrischen Projektion aufgetragen und abgenommen werden können.

Maßstabconstruktion der monodimetrischen und anisometrischen Projektion.

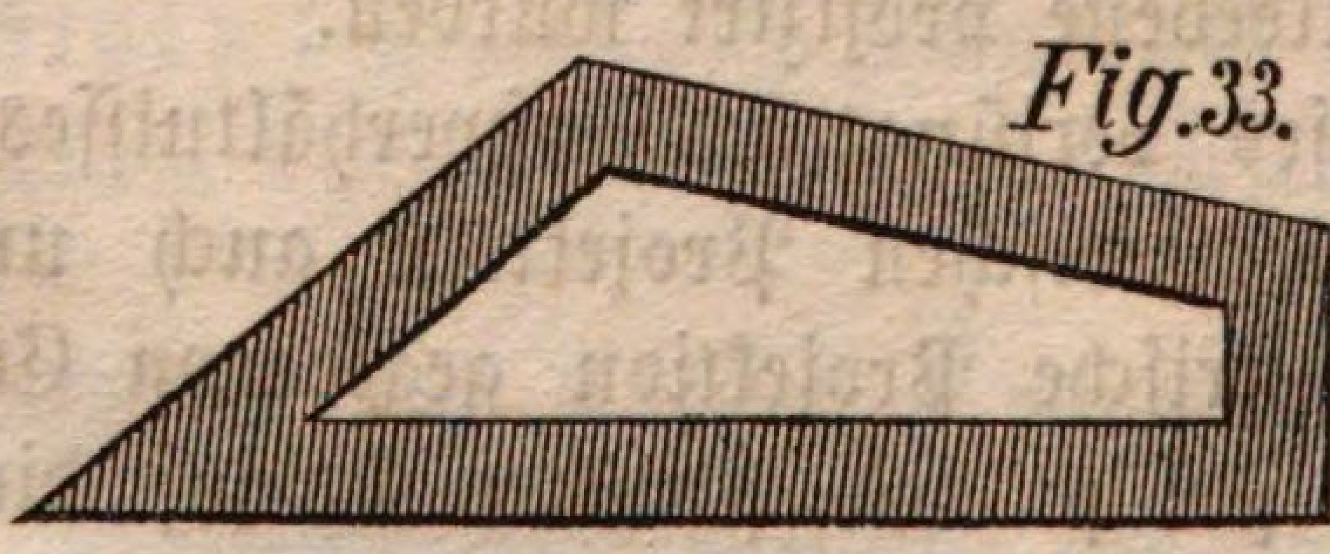
50) Der Winkelmaßstab Nr. II und III Blatt I für die monodimetrische und anisometrische Projektion, aus dem Verjüngungsverhältnisse der Axenprojektion hervorgehend, wird ähnlich wie Nr. I construirt.

Hiebei werden in Nr. II und III die gerade Linie, welche mit o d etwa den Winkel bildet, den die x Axe mit der Bildebene einschließt, der x Schenkel des Winkelmaßstabes und die geraden Linien, welche mit o d den Winkel bilden, den die y und z Axe mit der Bildebene einschließt, der y und z Schenkel des Winkelmaßstabes genannt.

Sind die Größenverhältnisse des axonometrisch darzustellenden Gegenstandes durch Maße gegeben, so können statt des Winkelmaßstabes für die isometrische Projektion Nr. 1ª Blatt I, für die monodimetrische und anisometrische Projektion die Maßstäbe Nr. 2ª und 3ª benützt werden, wozu bei Nr. II und 2ª das Axenverhältniß 1 : 1 : ½ und für Nr. III und 3ª das Axenverhältniß 1 : 0, 9 : 0, 5 gewählt wurde.

Für das praktische Zeichnen bleibt nur noch zu erwähnen, daß die mit den Axenprojektionen o x, o y, o z pa-

Fig. 33.



rallelen Linien bei der isometrischen Projektion am einfachsten mittelst des allgemein gebräuchlichen 30er-Winkels in Verbindung mit der Reißschiene zu ziehen sind, und bei dem Systeme 1 : 1 : ½ ein Winkel wie nebenstehend in Fig. 33 mit Vortheil anzuwenden ist.

Axonometrische Projektion von Raumgrößen, deren Hauptdimensionen in den Coordinaten-Axen oder parallel mit diesen liegen.

51) **2. Aufgabe.** Fig. 7 Blatt I.

Zwei Coordinaten eines in der x Ebene liegenden Punktes A sind gegeben, es soll seine axonometrische Projektion hieraus construirt werden.

Lösung.

Liegt der Punkt A in der x Ebene, ist seine Länge 8″ und seine Breite 9″ und soll in Fig. 7 die axonometrische Projektion A des Punktes A nach dem Systeme 1 : 1 : ½ construirt werden, so trage man aus dem y Maßstabe Nr. 2ª 8″ nach Fig. 7 von o ab auf die y Axe, ziehe durch den Punkt a′ eine Parallele mit der z Axe und mache A a′ nach dem z Maßstabe 9″; in A ist dann die axonometrische Projektion des Punktes.

Aehnlich ist auch in Fig. 7 die axonometrische Projektion B b′ des Punktes B gezeichnet, welcher in der z Ebene liegt und durch seine Höhe 7″ und die Länge 6″ gegeben war, desgleichen die axonometrische Projektion C c′ des Punktes C, welcher in der y Ebene sich befindet und durch seine Höhe 5″ und Breite 4″ bestimmt war: hiebei wurde für die Linien o b′ und c c′ der x Maßstab Nr. 2ª angewendet.

52) **3. Aufgabe.** Fig. 8 Blatt II.

Die axonometrische Projektion einer in der y Ebene liegenden Flächenfigur, deren Mitte im Punkte o ist, soll nach dem monodimetrischen Systeme 1 : 1 : ½ gezeichnet werden.

Lösung.

Denken wir uns die Hälfte dieser in der y Ebene liegenden Flächenfigur, deren Maßverhältniß in der geometrischen

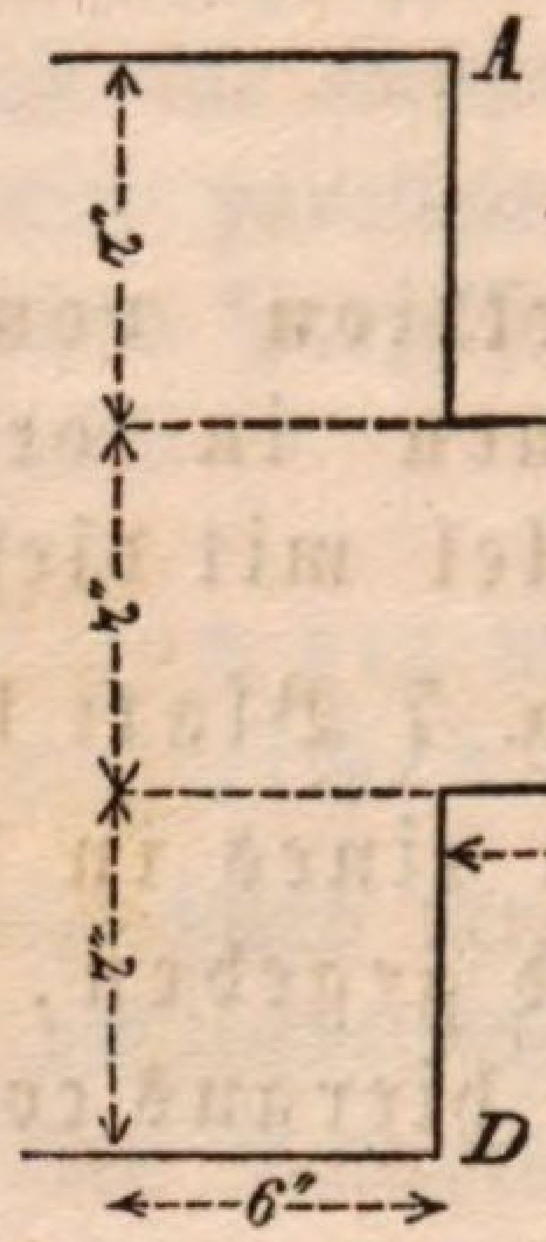


Fig. 8ᵃ

Zeichnung Fig. 8ᵃ gegeben ist, mittelst des monodimetrischen x Maßstabes Nr. 2ᵃ in die Bildebene gelegt, so werden die auf der x Axe normal stehenden Seiten der Figur, nämlich $a' a^+$, $b' b^+$, $c' c^+$ und $d' d^+$ in a', b', c', d' die Anfangspunkte der axonometrischen Längen der Punkte A, B, C und D bestimmen.

Werden dann aus a' b' c' d' Parallele mit der z Axe geführt, und hier $a\,a' = \frac{1}{2}\,a'\,a^+$, dann $b\,b' = \frac{1}{2}\,b'\,b^+$ gemacht u. s. f., so ergeben sich in a, b, c, d die Punkte für die eine Hälfte der axonometrischen Projektion dieser Figur, deren andere Hälfte sich aus der ersteren ergibt.

53) **4. Aufgabe.** Fig. 9, 10 und 11 Blatt II.

Gegeben ist der Radius des Kreises eines regulären n Eckes, welches in einer Coordinaten-Ebene liegt, und dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte o zusammenfällt; man soll die axonometrische Projektion nach dem Systeme $1 : 1 : \frac{1}{2}$ construiren.

Lösung.

In Fig. 9 ist das gegebene n Eck ein reguläres Sechseck,

dessen Radius 1′ mißt. Soll dasselbe in der x Ebene liegend dargestellt werden, so lege man dasselbe nach dem monodimetrischen y Maßstab Nr. 2ᵃ in die Bildebene und fälle aus seinen Eckpunkten Normalen auf die y Axe, (was jedoch hier bei der angenommenen Stellung des Sechseckes überflüßig ist, da ohnehin die Seiten a+ a+ und c+ c+ normal zur y Axe sind), wodurch sich in a′ und c′ die Anfangspunkte der axonometrischen Breiten der Punkte a und c ergeben.

Werden dann durch a′ und c′ Parallele mit o z geführt und a a′ und c c′ gleich $1/2$ a′ a+ und ebenso b o gleich $1/2$ b+ o gemacht, so wären a, b, c . . . die Punkte für die axonometrische Projektion des Sechseckes.

54) Bei Fig. 10 ist das n Eck ein reguläres Achteck, dessen Kreishalbmesser 1′ beträgt. Um die axonometrische Projektion dieses in der z Ebene liegenden Achteckes zu construiren, lege man wieder hier die Hälfte des regulären Achteckes nach dem x Maßstabe Nr. 2ᵃ in die Bildebene, so werden die aus den Eckpunkten a+, b+, c+, d+ auf die x Axe geführten Normalen in a′, b′, c′, d′ die Anfangspunkte geben, aus denen man Parallele mit der y Axe zieht, und, da bei diesem monodimetrischen Systeme der y Maßstab gleich dem x Maßstabe ist, die axonometrische Länge a a′ = a+ a′, dann b b′ = b+ b′ u. s. w. macht, woraus sich die Punkte a, b, c, d der einen Hälfte der axonometrischen Projektion des gegebenen Achteckes ergeben.

Bei Fig. 11 ist das gegebene n Eck ein reguläres Sechseck, dessen Kreishalbmesser 1′ beträgt; dasselbe liegt in der y Ebene und soll nach dem Systeme 1 : 1 : $1/2$ construirt werden, was in gleicher Weise wie bei Fig. 8 geschieht.

55) **5. Aufgabe.** Fig. 12—16 Blatt II.

Ein in einer Coordinatenebene liegender Kreis, dessen Radius gegeben und dessen Mittelpunkt mit dem Punkte o zusammentrifft, soll axonometrisch gezeichnet werden.

1. Lösung. Fig. 12.

Da der Kreis als reguläres n Eck mit unendlich vielen

Eckpunkten zu betrachten ist, so kann seine axonometrische Projektion in ähnlicher Weise wie bei vorhergehender Aufgabe erhalten werden, wenn man von beliebigen Punkten seines Umfanges die Projektion bestimmt, und diese Projektionen der Punkte durch eine krumme Linie verbindet.

Wäre nun ein in der x Ebene liegender Kreis, dessen Radius 11″ beträgt, nach dem Systeme 1 : 1 : ½ zu construiren, so lege man in Fig. 12 den Kreis nach dem y Maßstabe obigen Systemes in die Bildebene. Man beschreibe nämlich aus o mit dem Radius 11″ des erwähnten Maßstabes einen Kreis, welcher die y Axe in dem Punkte a und b schneidet, welche zwei Punkte dieser axonometrischen Kreisprojektion angehören.

Die aus dem Punkte o auf die y Axe geführte Normale $c^+ d^+$ theilt den Kreis in vier gleiche Theile. Die Projektion dieser auf der z Axe liegenden Punkte $c^+ d^+$ ergibt sich, indem man 11″ des z Maßstabes Nr. 2ª auf die z Axe von o nach c und d trägt, oder wie hier beim Systeme 1 : 1 : ½, c o = ½ c^+ o macht.

Die übrigen Punkte e, f, g, h ergeben sich, indem man aus den Theilpunkten e^+, f^+, g^+, h^+ des Kreises Parallele mit $c^+ d^+$ zieht, dann durch e′, f′, g′, h′ die Parallelen mit der z Axe und aus e^+, f^+, g^+ . . die Parallelen mit c^+ c führt.

Dieses Verfahren ist bei jeder in einer Coordinatenebene liegenden beliebig krummen Linie anwendbar und eignet sich besonders für Kreise, welche axonometrisch in eine gleiche Anzahl Theile getheilt werden sollen, wie dieses bei technischen Zeichnungen häufig vorkommt, z. B. bei Zahnrädern u. dgl.

56) **2. Lösung.** Fig. 13.

Da ferners die axonometrische Projektion des in der Coordinatenebene liegenden Kreises sich als Ellipse gestaltet und diese Axenlänge der Ellipse aus der Projektion der Kreisdurchmesser hervorgeht, so kann auch durch Construirung der letztern diese Kreisprojektion erhalten werden.

Nehmen wir an, der Kreis, dessen Radius 11″ mißt, soll in der x Ebene liegend nach dem Systeme 1 : 1 : ½ dargestellt werden, so wird bei dieser Lage die Projektion des Kreisdurchmessers A A parallel mit der Bildebene sein, derselbe daher in geometrischer Größe sich darstellen, und er kann zunächst aus dem geometrischen Maßstabe Nr. 0 Blatt 1 nach dem gegebenen Maße auf die in Fig. 13 durch o gehende Horizontale A A, welche im Punkte o auf der x Axe normal steht, aufgetragen werden, wodurch wir in A A die große Axe der Ellipse erhalten.

Die kleine Axe hievon, welche durch die Projektion jenes Durchmessers gebildet wird, welcher normal auf ersterem ist, ergibt sich, indem man 11″ des geometrischen Maßes Nr. 0 vom Punkte o des Winkelmaßstabes Nr. II auf den x Schenkel in b aufträgt, die Senkrechte b b′ zieht, welche die halbe Länge der kurzen Axe ist, die in Fig. 13 von o nach b″ und b^2 getragen wird.

Um nun noch mehrere Punkte für die Ellipse zu erhalten, gebe man die Projektion der in y und z liegenden Durchmesser c c′ und d d′ an, wobei man 11″ des y Maßstabes von o nach c und c′, und ebenso 11″ des z Maßstabes von o aus nach d und d′ trägt.

Wird ferner der Durchmesser c c′ in gleicher Entfernung von der Axe A A nach e e′ und ebenso d d′ in gleicher Weite von der kurzen Axe b″ b^2 nach f f′ gebracht, so ergeben sich hieraus 12 Punkte für die Ellipse.

57) In Fig. 14 soll der in der y Ebene liegende Kreis von 1′ Halbmesser mittelst der vorigen 2. Lösung (Ellipsen-Construktion) nach dem Systeme 1 : 1 : ½ gezeichnet werden.

Gleich dem in Fig. 13 zur Projektion der x Axe normalstehenden Kreisdurchmesser A A wird auch bei Fig. 14 die auf der y Axe normalstehende Projektion des Kreisdurchmessers B B in der Bildebene liegen und demnach die lange Axe B B der Ellipse nach dem geometrischen Maßstabe Nr. 0 aufgetragen; die kurze Axe ergibt sich, indem man auf den y Schenkel des Winkelmaßstabes Nr. II vom Punkte

o aus 1' des geometrischen Maßstabes nach n trägt, die Senkrechte n d fällt und n d als die halbe kurze Axe vom Punkte o der Fig. 14 zu beiden Seiten der langen Axe B B nach b und b' trägt.

Die Punkte c c' ergeben sich mittelst des x Maßstabes und die Punkte d d' mittelst des z Maßstabes Nr. 2ª In derselben Weise wie bei Fig. 13 ergeben sich auch in Fig. 14 die Punkte e e' und f f'.

58) Soll in Fig. 15 die in der z Ebene befindliche Kreislinie von 11" Halbmesser durch die Ellipsen-Construktion nach dem Systeme 1 : 1 : ½ construirt werden, so wird hier wieder die auf der Projektion der z Axe normalstehende Projektion des Kreisdurchmessers CC in der Bildebene liegend, sich in geometrischer Größe darstellen und sonach C C die lange Axe der Ellipse sein, deren kurze Axe dadurch erhalten wird, daß man 11" des geometrischen Maßes auf den z Schenkel des Winkelmaßstabes Nr. II von o nach p trägt, die Normale p p' zieht und p p' als halbe kurze Axe nach Fig. 15 von o nach b und b' überträgt. Die Punkte d d' und e e' lassen sich aus dem x oder y Maßstabe entnehmen.

59) Bei Fig. 16 liegt der Kreis in der z Ebene; sollte derselbe nach dem anisometrischen Systeme 1 : 0,9 : 0,5 mittelst der 1sten Lösung gezeichnet werden, so geschieht dieß in ähnlicher Weise wie beim Achtecke Fig. 10.

Man beschreibt nämlich aus o mit dem gegebenen Radius nach dem x Maßstabe Nr. 3ª einen Halbkreis, wodurch sich die beiden Punkte a und b ergeben, theilt den Halbkreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und zieht aus diesen Theilpunkten Normale auf die x Axe, welche die Anfangspunkte c' d' bestimmen, aus denen wir Parallele mit der y Axe führen und dieselben Längen c† c', d† d' u. s. w. des x Maßstabes nach dem y Maßstabe auf die Parallelen der y Axe aus den Anfangspunkten c' d' . . . nach c, d . . . tragen.

60) **6. Aufgabe.** Fig. 17 Blatt III.

Ein normales Prisma von 2', 4" Länge, wovon die Grundebene ein reguläres Achteck bildet,

dessen Kreishalbmesser 10″ beträgt, soll nach dem Systeme 1 : 0, 9 : 0, 5, so gezeichnet werden, daß die Grundebene in der y Ebene, und 2 Seitenebenen des Körpers mit der x Ebene und 2 andere mit der z Ebene parallel liegen, wobei der Kreismittelpunkt des Achteckes 2′ 8″ von der z Ebene und 1′ von der x Ebene entfernt ist.

Lösung.

Man construire zuerst die axonometrische Projektion m des in der y Ebene liegenden Mittelpunktes, indem man o m′ nach dem z Maßstabe Nr. 3ᵃ = 2′, 8″ und m′ m nach dem x Maßstabe = 1′ macht, und verlege dann den Anfangspunkt o der Coordinatenaxen nach dem Punkte m, wobei man durch m eine Parallele mit der z Axe führt, und mit 10″ des z Maßstabes Nr. 3ᵃ aus m einen Halbkreis für das halbe Achteck a, 1, 2, 3, 4, d beschreibt, welches man in die Bildebene gelegt denkt.

Werden nun aus den Eckpunkten dieses halben Achteckes Normale auf die z Axe gezogen, so bestimmen diese in a, b, c, d die Anfangspunkte für die mit der x Axe zu ziehenden Parallelen, auf welchen man die Längen a 1, b 2, c 3, d 4 des z Maßstabes nach dem x Maßstabe Nr. 3ᵃ in a I, b II u. s. w. aufträgt, woraus die Punkte I, II, III, IV des in der y Ebene liegenden Achteckes hervorgehen.

Die vollständige Projektion des Prismas ergibt sich, indem man an diese erhaltenen Punkte I, II, III Parallele mit o y zieht und eine dieser Linien z. B. I I′ nach dem y Maßstabe Nr. 3ᵃ = 2′, 4″ macht und dann an I′ die Seiten des zweiten Achteckes parallel mit denen des ersten anfügt.

61) **7. Aufgabe.** Fig. 18 Blatt III.

Eine normale Pyramide von 2′, 9″ Höhe, deren Grundebene ein reguläres Sechseck ist, dessen Seitenlänge 1′ mißt, soll nach dem Systeme 1 : 1 : ½ von **unten** so gezeichnet werden, daß die Grundebene in die x Ebene kommt, wobei die Spitze der

Pyramide nach unten gerichtet ist und ihre Axenlinie mit der x Axe zusammentrifft.

Lösung.

Zunächst wird hier nach dem z Maßstabe Nr. 2ª das halbe reguläre Sechseck von 1′ Halbmesser construirt, wobei der Punkt o als Mittelpunkt desselben anzunehmen ist; dann fälle man aus den Ecken b^+ und c^+ Normale auf die z Axe, und aus den Punkten b′ c′ Paralle mit der y Axe, und trage die Längen b^+ b′, c^+, c′ des z Maßstabes nach dem y Maßstabe in b′ b und c′ c auf, wodurch sich in a b c d die axonometrische Projektion von vier Eckpunkten der Grundebene ergibt. Ihre Punkte e und f ergeben sich in gleicher Weise wie die Punkte b und c.

Um dann die Projektion der Pyramide zu erhalten, mache man o S nach dem x Maßstabe = 2′, 9″ und verbinde die Spitze S durch Gerade mit den Eckpunkten der Grundebene.

Angenommen, es sei diese Pyramide durch eine mit ihrer Grundebene parallele Ebene abgeschnitten, und ihre Höhe bis zur Schnittebene messe 1′, 7″, so bringe man diese Höhe nach dem x Maßstabe von o nach o′, ziehe durch o′ eine Parallele mit c f und an die Punkte c′ f′ die Seitenprojektionen der Schnittebene parallel mit denen der Grundebene.

62) 8. **Aufgabe.** Fig. 19 Blatt III.

Fig. 19ª enthält die geometrische Zeichnung einer vierseitigen Platte mit kreisrunder Oeffnung, nebst Angabe ihrer Stellung zu den Coordinatenebenen, es soll dieselbe isometrisch dargestellt werden.

Lösung.

Die Maßverhältnisse des in Fig. 19ª verkleinert dargestellten Körpers sind in ihrer wirklichen Größe nach dem geometrischen Maßstabe Nr. 0 eingezeichnet. Zudem ist aus den angegebenen Spuren o′ y′ und o′ z′ zweier Coordinatenebenen ersichtlich, daß keine Seite des Körpers mit diesen zwei Ebenen parallel liegt.

Um nun das Viereck seiner obern Fläche isometrisch darzustellen, gebe man zunächst in Fig. 19 die isometrische Projektion des Quadrates o′ y′ p′ z′ Fig. 19ª nach dem isometrischen Maßstabe Nr. 1ª an, und trage nach demselben Maßstabe die Länge o′ a′, z′ b′, p′ c′ und y′ d′ in die isometrische Projektion des Quadrates o y p z Fig. 19 über, woraus in a b c d die isometrischen Projektionen der vier Eckpunkte der obern Körperfläche hervorgehen.

Die Punkte b″ c″ d″ der beiden sichtbaren unteren Begrenzungslinien des Körpers ergeben sich durch die aus b, c, d errichteten Senkrechten, denen man die Aufrißhöhe der Fig. 19ª nach dem isometrischen Maßstabe gibt.

Die isometrische Projektion der oberen Kreisfläche wird dadurch erhalten, daß man nach dem geometrischen Maßstabe Nr. 0 den Kreishalbmesser auf die Horizontale y z in m e trägt, während die Punkte g und h sich aus demselben Halbmesser nach dem isometrischen Maßstabe Nr. 1ª ergeben, und der Punkt f mittelst des Winkelmaßstabes Nr. I bestimmt werden kann, wobei die geometrische Länge des Halbmessers auf diesen Winkelmaßstab von o nach n getragen, die Normale n n′ errichtet, und dann in Fig. 19 m f = n n′ gemacht wird.

Um endlich die Projektion der unteren Kreislinie zu erhalten, ziehe man aus den Punkten e, f, g, h Senkrechte, denen die gleiche Höhe mit c c″ gegeben wird.

63) **9. Aufgabe.** Fig. 20 Blatt III.

Fig. 20ª gibt die verkleinert geometrische Zeichnung eines aus vierseitigen Prismen zusammengesetzten Körpers, dessen Maße nach dem geometrischen Maßstabe eingetragen sind. Der Körper soll nach dem Systeme 1:1:½ in der Weise dargestellt werden, daß alle seine Seiten parallel mit den Coordinatenebenen liegen, und der Eckpunkt a des auf der x Ebene normalstehenden Prismas 20″ von der z Ebene und 30″ von der y Ebene entfernt ist.

Lösung.

Zunächst wird hier die axonometrische Projektion des Eckpunktes a bestimmt, indem man die 20'' nach dem z Maßstabe Nr. 2ª von o nach a' trägt, durch a' eine Parallele mit o y zieht und auf diese 30'' des y Maßstabes von a' nach a bringt.

An diesem Eckpunkte a construire man den axonometrischen Grundriß des Körpers, wobei zuerst das Viereck a b c d bestimmt werden kann, indem man 10'' des y Maßstabes von a nach d trägt, durch a und d Parallele mit o z führt und a b = 10'' des z Maßstabes macht.

Die vollständige Körperprojektion ergibt sich dann durch die aus diesem Grundrisse errichteten Senkrechten, auf welche man die gegebenen Höhenmaße bringt, nämlich z. B. auf b e 13½'', 9½'' und 9½'' nach dem x Maßstabe trägt, und aus diesen Höhepunkten die zusammengehörenden Begrenzungslinien des Körpers parallel mit der y und z Axe zeichnet.

64) 10. **Aufgabe.** Fig. 21 Blatt III.

In Fig. 21ª ist die geometrische Projektion eines aus Prismen bestehenden Körpers gegeben, dessen Seiten parallel mit den Coordinatenebenen liegen; derselbe soll nach dem geometrischen Maßstabe Nr. 0 isometrisch dargestellt werden, wobei wie schon erörtert eine vergrößerte isometrische Projektion entsteht.

Lösung.

Nachdem die isometrischen Axen construirt sind, kann der isometrische Grundriß der unteren Körperfläche o' y' p' z' gezeichnet, aus demselben Senkrechte errichtet und auf diese die zugehörigen Höhen getragen werden, woraus diese isometrische Körperprojektion sich ergibt.

Allein einfacher dürfte es hier sein, den isometrischen Grundriß der oberen Körperfläche zuerst zu bestimmen, nämlich die Länge a b und b c des geometrischen Grundrisses auf die Axen o z und o y zu tragen, aus denen das Viereck o y p z hervorgeht, auf welches dann von dessen Eck-

punkten aus die Längen a d des geometrischen Grundrisses gebracht werden, wodurch die fünf Vierecke der oberen Körperfläche sich ergeben.

Sind ferners durch die aus z p und y geführten Senkrechten, auf welche die Aufrißhöhe des Körpers gebracht wurde, die unteren Begrenzungslinien gezeichnet, so können die übrigen Stufenlinien des Körpers dadurch erhalten werden, daß man aus dem geometrischen Grund- und Aufriß die Stufenhöhe auf eine der Senkrechten, etwa auf p p', und ebenso die Stufenbreite von p' nach e trägt, und aus diesen Höhen- und Breitenpunkten die Stufenlinien parallel mit den drei Axenlinien zieht.

65) **11. Aufgabe.** Fig. 22 Blatt III.

Die geometrische Projektion Fig. 22ª eines achteckigen Pfostens, dessen Sockel in das Viereck übergeht, so wie seine Stellung zu den Coordinatenebenen ist gegeben; es soll dessen isometrische Projektion mittelst des geometrischen Maßstabes construirt werden.

Lösung.

Bei der gegebenen Stellung des Körpers wird keine seiner Seiten parallel mit der y und z Ebene sein, und die isometrische Projektion hievon kann in ähnlicher Weise wie bei Fig. 21 construirt werden, nur daß hier der in der x Ebene liegende isometrische Grundriß dargestellt wird, während dort derselbe auf der mit der x Ebene parallelen oberen Fläche des Körpers gezeichnet wurde.

Auch hier wird zunächst das Viereck o y p z isometrisch angegeben, dann in dasselbe die Punkte 1, 2, 3, 4 des inneren Quadrates und ebenso die Punkte a, b, c, d des übereck gestellten Quadrates übergetragen, aus welchen der isometrische Körpergrundriß hervorgeht.

In welcher Weise nun die Zeichnung des Körpers aus diesem Grundrisse zu ermitteln, bedarf wohl keiner näheren Erläuterung.

66) **12. Aufgabe.** Fig. 23 Blatt III.

Ein auf der x Ebene normalstehender abgeschnittener Kegel von 26″ Höhe, mit kreisrunder Höhlung, dessen kleine Schnittfläche nach unten gerichtet, soll nach dem Systeme 1:1:$\frac{1}{2}$ gezeichnet werden. Der Radius seiner oberen Kreisfläche beträgt 11″ der der inneren Kreishöhlung 8″ und der Halbmesser des unteren Kreises 6$\frac{1}{2}$″, wobei die Kegelaxe mit der x Axe zusammenfällt.

Lösung.

Ist die axonometrische Projektion des äußeren und inneren Kreises wie bei Fig. 13 construirt, so wird die Höhe des Kegels in o o′ angegeben, nämlich 26″ nach dem x Maßstabe Nr. 2^a von o nach o′ getragen und dann der untere Kreis wie die beiden oberen gezeichnet.

67) **13. Aufgabe.** Fig. 24 Blatt III.

Die geometrische Projektion Fig. 24^a eines, durch eine schräge Ebene geschnittenen Kreiskegels ist gegeben, dessen isometrische Projektion gezeichnet werden soll.

Lösung.

Die Ellipse der isometrischen Grundebene des Kegels wird wie bei Fig. 19, die Ellipse von dessen Schnittebene aber in folgender Weise construirt.

Aus der geometrischen Zeichnung Fig. 24^a ist ersichtlich, daß die in der Ebene E liegende große Axe a b des Schnittes durch den Punkt c geht. Denken wir uns durch diese Axe oder durch die Linie a c eine senkrechte Ebene gelegt, so wäre a′ c′ ihre horizontale Projektion, oder die Spur, nach welcher die Projektionsebene von der senkrechten Ebene geschnitten wird.

Trägt man nun in Fig. 24 die isometrische Projektion a a″ c″ dieser senkrechten Ebene auf, welche durch den Mittelpunkt S″ gehen muß, und construirt dann das isometrische Rechteck 1″ 2″ 3″ 4″ aus dem geometrischen a′ I′ b′ II′, so ist dieses die isometrische horizontale Projektion des Rechteckes I, II, III, IV, aus welchem man die beiden Axen für die

Ellipse der isometrischen Projektion des Kegelschnittes erhält, mittelst welcher dieselbe gezeichnet werden kann.

Dieses Rechteck I, II, III, IV wird gefunden, wenn man aus den Ecken der isometrischen horizontalen Projektion Parallelen mit der x Axe führt, und a'' a gleich a° a und b'' b gleich b° b Fig. 24ª macht, wobei zwei Seiten des Rechteckes parallel mit a b und zwei Seiten parallel mit der z Axe liegen.

Axonometrische Projektion des Umdrehungskörpers.

68) Denken wir uns einen Umdrehungskörper, dessen Axe parallel mit einer der Coordinatenaxen ist, und eine auf jener Axe normalstehende Ebene, so wird diese den Umdrehungskörper nach einem Kreise schneiden.

Denken wir uns ferners einen Kegel, dessen Axe mit der Umdrehungsaxe zusammenfällt, und dessen Mantel den Umdrehungskörper in jenem Kreise berührt, so werden die Umdrehungsfläche und die Kegelfläche die Peripherie dieses Kreises als gemeinschaftliche Berührungspunkte haben und daher die axonometrische Projektion der Punkte jenes gemeinschaftlichen Berührungskreises, welcher der Kegelfläche zugehörig gedacht wird, zugleich die axonometrische Projektion zweier Punkte sein, welche in jenem Kreise liegen und der Umdrehungsfläche angehören.

Die axonometrische Projektion eines Umdrehungskörpers kann daher gezeichnet werden, indem man eine Anzahl solcher Kreise und die ihnen zugehörigen Berührungskegel annimmt und in Projektion setzt, wodurch sich in den Punkten, welche die Kegelprojektionen mit den entsprechenden Kreisprojektionen gemeinschaftlich haben, die Projektionspunkte für den Umdrehungskörper ergeben.

69) **14. Aufgabe.** Fig. 25 Blatt V.

Axonometrische Projektion der Kugel.

Lösung.

Die Kugel als der einfachste Umdrehungskörper kann

zwar nach obigem Verfahren construirt werden. Da aber die rechtwinkelige Projektion der Kugel, wie auch dieselbe zur Bildebene liegen mag, immer als Kreis erscheint, dessen Halbmesser gleich dem Halbmesser der Kugel ist, so kann dieselbe auch dadurch erhalten werden, daß man aus dem axonometrischen Mittelpunkte derselben einen Kreis mit dem geometrischen Halbmesser der Kugel beschreibt.

Zum Beweise, daß die axonometrische Kugelprojektion sich als Kreis gestaltet, soll in Fig. 25 die Projektion der Kugel auf einer schiefstehenden Ebene, auf welcher die projizirende Linie rechtwinkelig angenommen ist, in gleicher Weise wie die Würfelprojektion Fig. 13 construirt werden.

Hiebei ist A′ als Grundriß und A als die in die Grundrißebene umgelegte Seitenansicht der Kugel, N p′ als die gemeinschaftliche Axe der hiezu benützten Projektionsebenen und p p′ als die horizontale Projektion der Bildebene angenommen, und p′ p″ wäre die in die horizontale Projektionsebene umgelegte Seitenansicht der Bildebene.

Legt man nun durch den Kugelmittelpunkt m eine Schnittebene parallel zur Bildebene, so wird a a ihre Projektion in der umgelegten Seitenansicht A sein und ihre Grundriß-Projektion sich als Ellipse zeigen, deren große Axe b b ist.

Diese Schnittebene auf die mit ihr parallele Bildebene projizirt, gibt uns in a″ a″ und b″ b″ die vom Mittelpunkte m″ in gleicher Entfernung bleibenden Grenzpunkte ihres Kreises und dieser Kreis wird zugleich der der Kugelprojektion sein.

Wäre nun ferners noch die Aufgabe gestellt, mehrere Schnitte, welche jedoch nicht mit der Bildebene parallel sind, auf dieser Kugelprojektion darzustellen, so werden dieselben sich immer als Ellipsen zeigen.

Bestimmt man z. B. die Ellipse des senkrechten Schnittes C, wovon c c dessen Projektion in der umgelegten Seitenansicht ist, so wird b″ b″ die große und c″ c″ die kleine Axe hievon sein, wovon jedoch bloß die eine Hälfte der Ellipse auf dem oberen vorderen Theile der Kugel sichtbar ist.

Desgleichen wird auch die Ellipse des wagrechten Schnittes D, dessen geometrische Projektion d d ist, nur halb auf der vordern untern Kugelfläche sich zeigen, während die Ellipse der wagrechten Schnittprojektion a e auf der obern Kugelfläche ganz sichtbar ist.

70) **15. Aufgabe.** Fig. 26 Blatt V.

Es soll ein Umdrehungskörper, dessen Erzeugungsebene o′ a b . . . f o und dessen Umdrehungsaxe o o′ in Fig. 26ª gegeben ist, nach dem Systeme 1 : 1 : $^1/_2$ construirt werden.

Hiebei soll die Umdrehungsaxe mit der x Axe und der Punkt o′ mit dem Anfangspunkte o der Coordinatenaxen zusammenfallen.

Lösung.

Man lege durch geeignete Punkte der Umdrehungsaxe in Fig. 26ª z. B. durch 1, 2 die Schnittebenen b 1, c 2 u. s. w., welche normal zur Axe sind, und gebe die Spitzen S des Kegels an, welcher die Kreise jener Schnittebenen berührt, und ziehe durch den Punkt o′ beliebig die gerade Linie s o′, auf welcher die axonometrischen Höhen der Mittelpunkte der Kreise, sowie die der Kegelspitzen in folgender Weise bestimmt werden.

Man bringe nämlich auf o o′ eine beliebige Größe G o′ nach dem geometrischen Maßstabe Nr. 0 und trage auf o′ s dieselbe Größe nach dem x Maßstabe Nr. 2ª als o′ g auf und ziehe parallel mit G g die Linie S s, o V, 4 IV u. s. w., wodurch sich auf der Linie o′ s die axonometrischen Höhen-Projektionen der Kreismittelpunkte und die der Kegelspitzen ergeben.

Die axonometrische Projektion Fig. 26 geht dann hervor, wenn man die axonometrischen Höhen der Mittelpunkte o′ I, II III . . . Fig. 26ª nach o″ I′ II′ Fig. 26 bringt, durch diese die horizontalen Linien o″ a′, I′b′ u. s. w. zieht, auf welche dann die geometrischen Halbmesser o′a, 1 b, 2 c Fig. 26ª übergetragen werden, die uns für die Kreis-Projektionen

die große Axe ihrer Ellipsen geben, welche wie in Fig. 13 Blatt II zu construiren sind.

Haben wir nun z. B. die unterste Ellipse, deren große Axe a' a' ist, gezeichnet (wovon man jedoch bloß die vordere Hälfte zu bestimmen braucht), so trage man aus Fig. 26ᵃ die axonometrische Höhe o' s' der Spitze S' ihres Berührungskegels nach Fig. 26 von o'' nach S'' und führe aus S'' Tangenten an die Ellipse, woraus die Punkte n n des Umdrehungskörpers hervorgehen.

Werden nun auch die Ellipsen der übrigen Kreisprojektionen, soweit solche in Betracht kommen, gezeichnet, dann die axonometrische Projektion ihrer Kegelspitzen S^+, S^0 bestimmt und von letzteren Tangenten an die betreffenden Ellipsen geführt, so erhalten wir die Punkte, welche, durch eine krumme Linie verbunden, die Projektion des Umdrehungskörpers geben.

Zugleich wurde in Fig. 26 die axonometrische Projektion o^2 p . . . o'' eines Schnittes des Körpers mit der y Ebene angegeben, welcher erhalten wird, wenn man die Halbmesser der angenommenen Kreise nach dem z Maßstabe Nr. 2ᵃ auf ihre zugehörigen Projektionslinien trägt, die von den Punkten o'' I', II' u. s. w. ausgehen und parallel mit der z Axe sind.

71) **16 Aufgabe.** Fig. 27 Blatt IV.

Die axonometrische Projektion einer flachgängigen Schraube soll nach dem Systeme 1 : 1 : ½ dargestellt werden.

Lösung.

Die Construktion der geometrischen Zeichnung der flachgängigen Schraube Fig. 27 wurde im II. Theil der II. Abtheilung dieses Werkes bereits erläutert.

Bei der axonometrischen Projektion derselben Fig. 27ᵇ ist jedoch nicht das gewöhnliche Verhältniß der Ganghöhe wie bei Fig. 27 beibehalten, sondern der Radius der Schraubenspindel = 8'' und die Höhe der auf dem Mantel des Cylinders liegenden Schraubenlinie = 12'' und die Gang=

tiefe = 4″ angenommen, wonach der Radius des äußeren Cylinderkreises 12″ beträgt.

Um die axonometrische Projektion der betreffenden Schraubenlinien zu erhalten, sind zunächst die axonometrischen Grundrisse jener beiden Cylinder zu zeichnen, auf welchen die Schraubenlinien liegen.

Wird dann die gegebene Ganghöhe dieser Schraubenlinien in 12 Theile getheilt, so sind die Ellipsen Fig. 27ᵃ axonometrisch gleichfalls in 12 Theile zu theilen, wozu der halbe Grundkreis des äußern Cylinders geometrisch in 6 Theile getheilt und diese Theilpunkte durch Senkrechte in die axonometrische Projektion dieses Kreises gebracht werden.

Die Theilpunkte der kleinen axonometrischen Kreisprojektion ergeben sich aus den axonometrischen Radien o″ 1′, o″ 2′ u. s. w.

Mittelst dieser Theilpunkte der kleinen Ellipse kann man die axonometrische Projektion einer vollständigen Schraubenlinie in folgender Weise construiren.

Ist nämlich der eine die Schraubenspindel bildende Cylinder gezeichnet und soll die Schraubenlinie von der vom Theilpunkte a ausgehenden linken Seite begonnen werden, so wird ihr erster Punkt a sein, der in dem Durchschnitte mit a o und der sichtbaren linken Seite des Cylinders liegt.

Der zweite Punkt b ergibt sich, indem man aus dem Höhenpunkte 1 eine Parallele mit dem axonometrischen Radius o″ 1′ zieht, die von der aus b′ errichteten Senkrechten in b geschnitten wird.

In gleicher Weise können nun auch die übrigen Punkte c d u. s. w. bestimmt und ebenso die Punkte A, B, C, D . . . der Schraubenlinie des äußern Cylinders construirt werden.

Sind dann die Punkte beider Schraubenlinien ermittelt und die letzteren gezeichnet, so kann die axonometrische Projektion der Schraube in Fig. 27ᵇ einfach dadurch erhalten werden, wenn man die Höhe A n (welche hier zu 3″ angenommen ist) nach dem x Maßstabe Nr. 2ᵃ aus den Punkten B C . . . der äußeren Schraubenlinie nach unten zu

auf die senkrechten Seiten des äußeren Cylinders trägt, woraus sich dann die Punkte für die untere sichtbare Schraubenlinie dieses Cylinders ergeben.

Axonometrische Darstellung von Raumgrößen, deren Hauptdimensionen nicht parallel mit den Coordinatenaxen sind.

72) Betrachten wir in Fig. 29ª Blatt II 1, b als Aufriß einer einfach schiefstehenden Linie, deren Neigungswinkel zur x Ebene 55° beträgt und deren horizontale Projektion 1′ 2′ parallel der y Axe liegt, und denken uns durch diese Linie eine senkrecht stehende Ebene gelegt, welche sich als das rechtwinkelige Dreieck 1 a b darstellt, und geben diesem Dreiecke eine Stellung wie bei Fig. 30ª, wobei seine horizontale Kathete b a sich verkürzt, während die vertikale a 1 unverändert bleibt, so wird dessen sich gleichfalls verkürzende Hypotenuse die Projektion der doppelt schiefstehenden Linie 1 b geben.

Denken wir uns ferners durch die Linie 1 b Fig. 29ª eine auf der z Ebene normalstehende Ebene gelegt, deren Schnittlinie mit der x Ebene dann 2′ 3′ wäre, so wird diese einfach schiefstehende Ebene sich unter einem Winkel von 55° zur x Ebene neigen.

Bringen wir dieselbe in die Stellung Fig. 30ª, wobei sie zwar ihren Neigungswinkel zur x Ebene beibehält, jedoch der Richtungswinkel ihrer Schnittlinie 2′ 3′ mit der y Axe kein rechter Winkel wie bei Fig. 29ª mehr ist, so stellt sich diese Ebene in doppelt schiefer Stellung dar.

Nehmen wir an, diese einfach und doppelt schiefstehende Ebene sei Grundebene eines Körpers, dessen Axenlinie normal auf dieser stünde, so wird im ersten Falle eine einfach schiefstehende Körperprojektion, im zweiten Falle eine doppelt schiefstehende zum Vorschein kommen, wo bei letzterer die Hauptdimensionen des Körpers keine parallele Lage zu den Coordinatenaxen haben werden.

Hat der axonometrisch darzustellende Körper keine Lage,

bei welcher die Hauptdimensionen parallel den Coordinatenaxen liegen, so wird die einfachste Construktionsweise darin bestehen, daß man zuerst die x und z Ebene gleichsam als geometrische Grund- und Aufrisse behandelt und die zwei rechtwinkeligen Projektionen des Körpers in der verlangten Stellung zeichnet, wobei jedoch diese Grund- und Aufrisse nicht nach dem geometrischen Maße wie bei Fig. 29ᵃ und 30ᵃ, sondern nach einem axonometrischen Maßstabe zu construiren sind, wodurch dann die Coordinaten von Punkten, welche sich aus dieser geometrischen Ansicht ergeben, unverjüngt in die zu construirende axonometrische Projektion des Körpers sich übertragen lassen.

73) **17. Aufgabe.** Fig. 28 Blatt IV.

Es soll nach dem Systeme **1 : 1** : ½ die axonometrische Projektion eines doppelt schief stehenden Prismas gezeichnet werden, dessen einfach schiefe und doppelt schiefe geometrische Projektion in Fig. 28ᵃ und 28ᵇ mittelst des axonometrischen x und y Maßstabes obigen Systemes dargestellt ist.

Lösung.

Aus der gegebenen geometrischen Projektion Fig. 28ᵃ und 28ᵇ ist ersichtlich, daß die fünfseitige Grundebene dieses Prismas mit dem Eckpunkt 1° die x Ebene berührt und die Grundebene eine Neigung von 32° zur x Ebene hat.

Um in Fig. 28 mittelst der in Fig. 28ᵇ construirten geometrischen Ansicht die axonometrische Projektion des Körpers zu bekommen, sind daselbst der axonometrische Grundriß I′, II′, III′, IV′, V′ der oberen Grundebene und der eines Eckpunktes 1″ der untern Grundebene zu construiren, welche sich dadurch ergeben, wenn man auf die y Axe die Länge o a, o b u. s. w. der einzelnen Punkte gleich den geometrischen Längen o a, o b u. s. w. trägt und dann auf die z Axe die axonometrischen Breiten o a′, o b′ dieser Punkte gleich der halben geometrischen Breite o a′, o b′ macht.

Werden dann aus den aufgetragenen Punkten der y Axe Parallele mit der z Axe und ebenso aus den Punkten der z Axe Parallele mit der y Axe geführt, so bestimmen diese in I′, II′, III′, IV′, V′ die Punkte des axonometrischen Grundrisses der oberen Grundebene des Körpers, aus dem nun die axonometrische Projektion I, II, III, IV, V der oberen sichtbaren Grundebene hervorgeht, indem man die Höhen-Coordinaten I′ I, II′ II u. s. w. angibt und dieselben gleich der in Fig. 28^b erhaltenen Höhe a 1, b 2 . . . macht.

Bestimmt man weiters die axonometrische Projektion des Eckpunktes 1″ der unteren Grundebene ebenso wie die Punkte des Grundrisses der oberen Grundebene, so erhalten wir in 1″ I die sichtbare Seitenkante des Prismas, mit der die übrigen parallel zu ziehen sind.

Da die Projektionen der untern Grundkanten gleichfalls parallel mit denen der obern Grundebene sind, so können jene parallel mit den oberen gezogen werden.

74) **18. Aufgabe.** Fig. 29 und 30 Blatt II.

In Fig. 29^a und 30^a sind die geometrischen Projektionen einer einfach schief und doppelt schief gestellten Quadratebene, in welche ein Kreis gezeichnet ist, nach dem geometrischen Maßstabe Nr. 0 dargestellt; es soll hieraus nach dem Systeme $1 : 1 : {}^1/_2$ die axonometrische Projektion der Quadratebene in einfach schiefer und doppelt schiefer Stellung mit der in ihr liegenden Kreis-Projektion construirt werden.

Lösung.

In Fig. 29^a sind je zwei Seiten des Grundrisses der Quadratebene parallel mit der y und z Axe; die Quadratebene, deren eine Seite in der x Ebene liegt, hat eine Neigung von 55° zur x Ebene.

Bestimmt man nun bei Fig. 29 ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe den axonometrischen Grundriß der Quadratebene und den Grundriß der in ihr liegenden acht Punkte

des Kreises und gibt die axonometrische Höhen=Coordinate 1 1' an, welche der geometrischen Höhe 1, a Fig. 29ª gleich gemacht wird, so ergibt sich in 1, 2, 3, 4 die axonometrische Projektion des Quadrates.

Wie ferners aus dem axonometrischen Grundriß die acht Punkte der axonometrischen Kreisprojektion (wovon die Punkte e e und f f die große und kleine Axe ihrer Ellipse geben) durch die Höhen=Coordinaten bestimmt werden, ist aus der Zeichnung zu entnehmen.

Selbstverständlich müssen hier, sowie bei Fig. 30 die geometrischen Maße der gegebenen Figur nach dem x, y und z Maßstabe Nr. 2ª übergetragen werden.

Lösung. Fig. 30.

Der Grundriß des Quadrates in doppelt schiefer Stellung Fig. 30ª hat keine parallele Lage zur y und z Axe und kann mit seinem Kreise wie bei Fig. 28 in Fig. 30 axonometrisch gezeichnet und dann aus diesem axonometrischen Grundrisse die axonometrische Projektion des Quadrates und des Kreises wie bei Fig. 29 ermittelt werden.

75) **19. Aufgabe.** Fig. 31 Blatt IV.

Fig. 31ª und 31ᵇ enthält die geometrische Zeichnung eines einfach schief und doppelt schief stehenden Cylinders, in der Größe des x und y Maßstabes Nr. 2ª des Systemes 1 : 1 : ½ dargestellt; man soll die axonometrische Projektion des doppelt schiefstehenden Cylinders construiren.

Lösung.

Zunächst bestimme man den axonometrischen Grundriß des Cylinders, indem wie bei Fig. 30 der Grundriß seines oberen Grundkreises und dann der des unteren Grundkreises ermittelt wird, wobei man die halbe Länge o l' Fig. 31ᵇ nach Fig. 31 auf die z Axe von o nach l' trägt und l' a⁰ = l' a² Fig. 31ᵇ macht.

Durch m und b Parallelen mit der Richtung a a⁰ und durch a⁰ eine Parallele mit der großen Axe a b der Ellipse des Grundrisses geführt, gibt in a⁰ b⁰ die große Axe der zweiten

Ellipse des Grundrisses, deren kleine Axe c° d° aus der ersteren entnommen werden kann.

Ist nun der axonometrische Grundriß des Cylinders so weit hergestellt, so wird die axonometrische Projektion seines unteren Grundkreises ermittelt, wozu man die Höhen-Coordinaten a° A, b° B und d° D gleich den geometrischen Höhen n a und n d macht, woraus die beiden Axen A B und c° D für die Ellipse dieses Grundkreises hervorgehen.

Wird ferners die Höhen-Coordinate m M der geometrischen Höhe n m Fig. 31[b] gleich gemacht, so gibt M' M die axonometrische Projektion der Axenlinie des Cylinders, mit der seine Seiten parallel gehen.

Die Ellipse des oberen Grundkreises kann nun durch Uebertragung der beiden Axen der unteren Ellipse erhalten werden, wobei man durch M diese Axen parallel mit der unteren zieht.

76) **20. Aufgabe.** Fig. 32 Blatt IV.

Die geometrische Zeichnung eines regulären achtseitigen Prismas, welches auf der Kante eines vierseitigen Prismas aufliegt, wodurch das erstere eine einfach schiefe Lage erhält, ist in Fig. 32[a] nach dem geometrischen Maßstabe Nr. 0 gegeben; beide Körper sollen nach dem Systeme 1 : 0,9 : 0,5 dargestellt werden, wobei die Entfernung der Körper von der y und z Ebene beliebig anzunehmen ist.

Lösung.

Auch hier wird zunächst der axonometrische Grundriß der vorderen Grundebene des achtseitigen Prismas construirt, wovon in Fig. 32[a] A B die geometrische Länge und a' B die Breite für das Viereck a a, b b dieses Grundrisses gibt, welche nach dem y und z Maßstabe Nr. 3[a] auf der mit der y und z Axe Parallelen a a und a b abzutragen sind.

Aus diesem Grundriß und der Höhen-Coordinate a c, die nach dem x Maßstabe Nr. 3[a] gleich der Höhe a' A Fig. 32[a] ist, geht dann die axonometrische Projektion des Quadrates hervor, in welchem das Achteck liegt, dessen Pro-

jektion gleichfalls aus dem Grundrisse wie bei Fig. 29 ermittelt wird.

Ist die Projektion des Achteckes gezeichnet, so bestimme man die Richtung der Seitenkanten dieses Prismas, wozu aus dem Eckpunkte 1 eine Parallele mit der z Axe geführt und auf dieser die Länge B D Fig. 32ª nach dem z Maßstabe Nr. 3ª in 1 d aufgetragen wird; d e nach dem x Maßstabe gleich D E gemacht, gibt in 1 e die Richtung der Seitenkante des achtseitigen Prismas und in d e die Höhe des mit der y Axe parallel liegenden vierseitigen Prismas.

Es können nun die Seiten des ersteren parallel mit 1 e gezogen und auf die axonometrische Grundlinie 1 g die Länge B g′ nach dem z Maßstabe aufgetragen werden, wo dann die Senkrechte g 1′ die Kantenlänge 1, 1′ des Prismas bestimmt, dessen hintere Grundebene nun parallel mit der vorderen gezeichnet wird.

Die Länge h i des vierseitigen Prismas (welche hier beliebig genommen wurde) wird nach dem y Maßstabe und die Breite d f nach dem z Maßstabe gemessen.

Um den auf der Mitte der vorderen Grundebene hervorragenden Cylinder, dessen Axenlinie n n′ normal auf dieser Grundebene steht, in Projektion zu setzen, bestimme man zuerst seine in der Grundebene liegende Ellipse, deren Construktionslinien aus der Zeichnung zu entnehmen sind, gebe dann nach dem z Maßstabe die Länge o p an, woraus die Axe n n′, sowie die vordere Ellipse und die Seiten des Cylinders sich ergeben.

Axonometrische Darstellung von sich schneidenden Körpern und deren Durchschnittsfiguren.

77) Bei Körperverbindungen, wo ein Körper in den andern eingedrungen ist, ändert sich die ursprüngliche Begrenzungsfläche der Körper durch die sich bildenden Durchschnittsfiguren, welche bei Darstellung derartiger Körperverbindungen in Projektion zu setzen sind.

Diese Durchschnittsfiguren sind abhängig von der Begrenzungsfläche der Körper.

Durchdringen sich zwei ebenflächige Körper, so wird ihre Durchschnittsfigur aus gebrochenen geraden Linien bestehen, bei zwei rundflächigen Körpern aber als krumme Linie erscheinen, während die Durchschnittsfigur eines ebenflächigen und rundflächigen Körpers eine gebrochene krumme Linie bildet.

78) **21. Aufgabe.** Fig. 33 Blatt V.

Ein reguläres sechsseitiges Prisma von 7″ Grundkante und 3′ Höhe durchdringt einen auf der x Ebene normalstehenden Cylinder von 8″ Halbmesser und 2′ 10″ Höhe, wobei die Axen beider Körper sich unter 1 R Winkel und in ihren Mitten schneiden, und die Axe des Cylinders mit der x Axe zusammenfällt; es soll diese Körperverbindung, sowie deren sichtbare Durchschnittsfigur nach dem Systeme 1 : ½ : 1 construirt werden.

Lösung.

Man construire zunächst den Cylinder, wobei sein unterer Grundkreis wie bei Fig. 13 Blatt II gezeichnet wird, nur daß hier des gegebenen Systemes wegen der in der y Axe liegende Durchmesser nach dem z Maßstabe Nr. 2ª und der der z Axe nach dem y Maßstabe gemessen wird.

Ferner bestimme man die mit der z Ebene parallele Grundebene des Prismas und dann seine Seiten. Hiebei gibt o n die Entfernung der x Ebene bis zur Axenlinie n m, welche parallel mit der z Axe ist.

Wird nun durch m und m′ eine Parallele mit der y Axe geführt und aus m oder wie hier aus m′ mit dem Radius der gegebenen Grundkante 7″ nach dem z (y) Maßstab Nr. 2ª der Halbkreis für das in die Bildebene umgelegte Sechseck beschrieben, dann aus den Ecken II′ und III′ Normale auf 1′ 4′ errichtet und aus den erhaltenen Anfangspunkten 2′ 3′ Parallelen mit der x Axe geführt und

die Länge 2′ II′ nach dem x Maßstabe in II 2 und III 3 getragen, so ergeben sich in 1, 2, 3 . . . die Punkte der axonometrischen Projektion der sechsseitigen Grundebene wovon die Seiten des Prismas parallel mit der z Axe liegen und nach dem y (z) Maßstabe gemessen werden.

Um die axonometrische Projektion der entstehenden Durchschnittsfigur zu erhalten, suche man jene Punkte, in welchen die sichtbaren Kanten des Prismas die sichtbaren Theile des Cylinders schneiden.

Hiezu denkt man durch die Eckpunkte 1 und 2 Ebenen, welche auf der x Ebene normal stehen und parallel mit der z Axe sind, wodurch der Cylinder nach geraden Linien geschnitten wird, welche parallel mit seiner Axe sind.

1′ a″ und 2′ b″ wären sonach die horizontalen Spuren solcher Schnittebenen, woraus die Fußpunkte a′ a″, b′ b″ der senkrechten Schnittlinien sich ergeben, welche in a a, b b und b^2 b^2 die Durchgangspunkte beider Körper bestimmen.

In gleicher Weise ergeben sich auch die Punkte c c und d aus der durch m′ und der zwischen 1′ und 2′ gelegten Schnittebene.

79) **22. Aufgabe.** Fig. 34 Blatt V.

Die axonometrische Projektion zweier sich durchdringender Pyramiden soll nach dem Systeme 1 : 1 : ½ construirt werden.

Die Höhe der auf der x Ebene normalstehenden sechsseitigen Pyramide beträgt 3′6″ und deren Grundkante 1′, wobei zwei Kanten der Grundebene parallel mit der z Axe sind.

Die Höhe der regulären vierseitigen Pyramide mißt 3′ 1″ und der Radius des Kreises ihrer mit der y Ebene parallelen Grundebene 11″, wobei eine Diagonale derselben parallel mit der x Axe ist.

Beide Axen der Pyramiden, wovon die der ersteren mit der x Axe zusammenfällt und die andere mit der y Axe parallel ist, schneiden sich rechtwinkelig.

Lösung.

Man construire zunächst den axonometrischen Grundriß, indem wie bei Fig. 9 Blatt II das in der x Ebene liegende Sechseck gezeichnet und aus den Eckpunkten 1′, 2′, 3′ Gerade nach o′ geführt werden.

Der axonometrische Grundriß der vierseitigen Pyramide ergibt sich, wenn man a′ m′ = b′ m′ = 11″ nach dem z Maßstabe macht und die gegebene Höhe der Pyramiden nach dem y Maßstabe von m′ nach N′ trägt.

Die axonometrische Projektion der sechsseitigen Pyramide, deren gegebene Höhe auf die Senkrechte o P getragen wird, läßt sich aus ihrem Grundrisse ermitteln.

Jene der vierseitigen Pyramide erhalten wir durch die Gerade N m, welche parallel der y Axe durch die Mitte o m° gelegt, und durch die Linie a b, welche durch m parallel mit der z Axe gezogen wird, auf welche die Grundrißpunkte a′ m′ b′ getragen und m c und m d = m a nach dem x Maßstabe gemacht wird, woraus die Grundebene a, c, b, d der Pyramide hervorgeht.

Die axonometrischen Projektionen von Punkten der Durchschnittsfigur ergeben sich in folgender Weise: Denke man durch die Seitenkante N c und N d der vierseitigen Pyramide eine Ebene gelegt, welche die Seite P, 3, 4 der andern Pyramide nach der Linie P n schneidet, so gehen hieraus die Punkte C D der Durchschnittsfigur hervor.

Betrachtet man ferners N′ a′ als horizontale Spur einer auf der x Ebene normal stehenden Schnittebene, so wird diese die sechsseitige Pyramide schneiden und die axonometrische Projektion e, f, g, h des Schnittes dieser Ebene mit der Pyramide sich dadurch ergeben, wenn man die Punkte e′, f′, g′, h′ des axonometrischen Grundrisses durch Senkrechte auf die zugehörigen Grund- und Seitenkanten jener Pyramide projizirt.

Die Projektion der Linie g h dieser Schnittebene, zugleich in der Seite P, 2, 3 der Pyramide liegend, bestimmt dann in A den Durchgangspunkt der Kante N a mit der Seitenebene P, 2 3 und die Linie g f in der Seite P, 1, 2

liegend, gibt in A′ den Durchgangspunkt der Kante N a mit der Seite P, 1, 2.

Um endlich noch die Durchgangspunkte I, I und III, III der Kante P 1 und P 3 mit den sichtbaren Seiten der vierseitigen Pyramide zu ermitteln, gebe man die axonometrische Seitenansicht p i der Kanten P 1 und P 3 an, welche die Grundebene der vierseitigen Pyramide in dem Punkte J, J′ schneidet, woraus die Durchgangspunkte I, I und III, III dieser Kanten mit den Seiten N a c und N a d sich ergeben.

80) **23. Aufgabe.** Fig. 35. Blatt V.

Die axonometrische Projektion zweier sich durchdringender Körper (eine fünfseitige Pyramide und ein vierseitiges Prisma), deren Lage und Größe gegeben ist, sollen nach dem Systeme 1 : 1 : ½ dargestellt werden.

Der Radius des Kreises für das Fünfeck der Grundebene der auf der x Ebene normalen Pyramide beträgt 1′ 1″, ihre Höhe 3′ 6″.

Die Höhe des vierseitigen Prismas hat 2′ 9″ und der Radius des Kreises seiner Grundebene 7″. Seine Axenlinie liegt parallel mit der y Axe, schneidet jedoch nicht die Axe der Pyramide.

Hiebei hat keine der Grundkanten der Pyramide eine parallele Lage zur y und z Axe, während eine Diagonale der Grundebene des Prismas parallel mit der x Axe liegt.

Lösung.

Die axonometrische Projektion dieser Körper ist ähnlich der vorigen Aufgabe, auch ergeben sich die Punkte c d und c+ d+ ebenso wie dort durch die senkrechte Schnittebene, deren horizontale Spur m′ n ist.

Um die Durchgangspunkte der Kanten P 2 und P 3 der Pyramide mit den sichtbaren Seiten des Prismas zu erhalten, gebe man wieder die axonometrische Seitenansicht p 2″, p 3″ dieser Kanten an, welche die Grundebene des Prismas in den Punkten 2° 2+ und 3° 3+ schneiden, woraus dann die Punkte II, II und III, III dieser Durchschnittsfigur hervorgehen.

81) **24. Aufgabe.** Fig. 36 Blatt V.

Fig. 36ª enthält die geometrische Zeichnung eines abgekürzten Kegels, der von einem Cylinder durchdrungen wird, aus welcher die axonometrische Projektion dieser Körperverbindung und deren Durchschnittsfigur nach dem Systeme 1 : 1 : ½ gezeichnet werden soll.

Lösung.

Die axonometrische Projektion dieser Körper, aus der axonometrischen Projektion ihrer Grundkreise hervorgehend, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Um die axonometrische Projektion der Punkte ihrer Durchschnittsfigur zu erhalten, gebe man die axonometrische Seitenansicht dieser Kegelprojektion an und denke durch die Kegelspitze S Ebenen gelegt, welche zugleich normal auf der y Ebene stehen und sonach den Kegel, sowie auch den Cylinder in Seiten schneiden.

Hieraus wird dann durch die Schnittlinie c′ s einer solchen Ebene die in der y Ebene liegende Cylinderbasis in c berührt und der Kegel von dieser Ebene in der Seite S c″ geschnitten, woraus der Punkt C hervorgeht, und ebenso die in der Kegelseite S a″ und S d″ liegenden Punkte A und D durch die Schnittlinie s a′ und s d′ sich ergeben, welche in a und d die Cylinderbasis schneiden.

Ebenso könnte man auch aus der geometrischen Zeichnung diese Punkte A C D in die axonom. Projektion übertragen, wobei z. B. die Cylinderseite C c angegeben und auf dieselbe ihre geometrische Länge c III nach dem y Maßstabe Nr. 2ª getragen wird.

82) **25. Aufgabe.** Fig. 37. Blatt V.

Gegeben ist die geometrische Zeichnung eines Umdrehungskörpers, der von einem normalen Cylinder durchdrungen wird, wobei die Axen beider zusammenfallen; man soll deren isometrische Projektion construiren.

Lösung.

Der Umdrehungskörper wird hier ähnlich wie bei Fig. 26 gezeichnet, wobei in Fig. 37ª D A D′ m als dessen Erzeugungsebene und F G als dessen Umdrehungsaxe zu betrachten ist.

In Fig. 37 ist der Punkt o als Anfangspunkt der Coordinaten-Axen angenommen, und der Berührungskegel des durch o gehenden Kreises hier ein Cylinder, daher die zwei gesuchten Punkte A A daselbst sich ergeben, wenn man o A Fig. 37ª nach o A Fig. 37 trägt.

Wird ferners in Fig. 37ª durch den Punkt 2 der Axe F G eine parallele Ebene mit A o gelegt, welche den Körper nach einem Kreise schneidet, und für diesen Kreis die Spitze seines Berührungskegels angegeben, und dann auf der Linie o s die axonom. Verjüngung des Axentheiles o 2 und die der Höhe der Kegelspitze S bestimmt, so kann für Fig. 37 die Höhe o II des Mittelpunktes entnommen und B 2 Fig. 37ª nach b II gebracht und die halbe Ellipse dieser Kreisprojektion gezeichnet werden.

Aus der axonom. Projektion der Kegelspitze S Tangenten an die Ellipse geführt, bestimmen diese in n n zwei Punkte des Berührungskegels.

Um nun noch den Grenzpunkt r zu erhalten, hat man wie in Fig. 37ª die Linie E zu construiren, welche mit der horizontalen o A denselben Winkel bildet, den die x Axe mit der Bildebene einschließt, und welcher aus dem Winkelmaßstabe Nr. 1 zu entnehmen ist.

Aus dem Mittelpunkte m des gegebenen Erzeugungskreises eine Normale auf E errichtet, bestimmt diese den Durchschnittspunkt dieser mit der Peripherie, und der Radius C 3 gibt den gesuchten Berührungskreis des Grenzkegels, der Größe und Lage nach, dessen Seitenlinien parallel mit der Richtung der Linie E gezogen, in Fig. 37ª seine geometrische Projektion geben werden, wobei seine Spitze in S′ sich darstellt.

Trägt man dann o 3′ nach Fig. 37 in o III und ebenso C 3 nach c III und bestimmt von c c die kurze Axe III r, so ergibt sich in r der oberste Grenzpunkt des Grenzkegels.

Mittelst der bereits erhaltenen Punkte A n r n A der oberen Hälfte des Körpers kann nun auch seine untere Hälfte gezeichnet und die Durchdringungs-Curve des Cylinders (die sich hier als Ellipse gestaltet und deren Axe d d ist), aus Fig. 37ᵃ ermittelt werden.

Einiges über die schräge Projektion.

83) Aehnlich der axonom. Projektion ist auch bei der schrägen Projektion zunächst der Grundriß des darzustellenden Körpers in Projektion zu setzen, aus dem dann das Uebrige des Körpers ermittelt wird.

Wäre nun Fig. 38 Blatt II der geometrische Grundriß eines Quadrates a b c d und X Y die Spur der Bildebene, auf welcher die schräge Projektion des Quadrates dargestellt werden soll (wobei zu bemerken ist, daß diese Spur jede beliebige Richtung haben kann), so denken wir uns die Quadratseite c d bis o und die Diagonale b d bis p verlängert, und die Spur X Y nach X′ Y′ verlegt, auf welcher dann die Punkte a o und p, welch letztere durch die Verlängerung der Linie c d und b d bis zur Spur X Y hervorgegangen, durch Senkrechte nach a′ o′ p′ projizirt werden.

Nimmt man dann beliebig den Punkt b′ an und zieht die Gerade b′ a′, und parallel mit dieser die Linie o′ c′, und verbindet dann den Diagonalpunkt p′ mit b′ durch eine Gerade, so bestimmt diese in d′ einen Eckpunkt der Seite d′ a′, mit welcher man b′ c′ parallel zieht, woraus in a′ b′ c′ d′ die schräge Projektion des Quadrats entsteht.

Um sich von der Richtigkeit der Construktionsweise zu überzeugen, suche man die Projektion der projizirenden Linie n b, indem man die Senkrechte b′ n zieht und n mit b verbindet. Führt man dann an die Eckpunkte c und d Paral-

lelen mit b n und bringt deren Schneidepunkte n n durch Senkrechte in die schräge Projektion, so werden dieselben mit den zugehörigen Eckpunkten c′ und d′ zusammentreffen.

Mittelst der Verlängerung von c b kann auf X Y (wenn es die Größe der Zeichnungsfläche gestattet), noch ein dritter Punkt q erhalten werden, welcher mit c b und c′ b′ zusammenläuft.

Ist die projizirende Linie für die schräge Projektion nicht besonders bestimmt, so kann immer der Punkt b ganz beliebig angenommen werden, und kann dann stets die Richtung einer schräg projizirenden Linie, bei welcher b die gewählte Lage haben muß, nachgewiesen werden.

84) Diese Construktion findet also ihre Anwendung beim Rechtecke, auch kann hiemit jede andere Flächenfigur in einem dieser Vierecke liegend, in schräge Projektion gebracht werden, so z. B. das reguläre Achteck (Fig. 39 Blatt II), indem man wieder die schräge Projektion seines Quadrates a b c d durch die zu bestimmenden Punkte o p zeichnet und dann durch die proportionale Theilung die Punkte des Achteckes ermittelt, wobei man a, 1, 2, b nach a′ 1′ 2′ b″ trägt und mit der Richtung b′ b″ Parallelen aus 1′ und 2′ zieht.

Die schräge Projektion des Achteckes ergibt sich dann, wenn aus den Punkten I und III Parallele mit der Diagonale b′ d′ und aus II und IV Parallele mit a′ c′ geführt werden.

85) Sollte ein bereits in schräger Projektion gezeichnetes Rechteck a b c d Fig. 40 Blatt II nach irgend einer Proportion vergrößert werden, z. B. um die Hälfte, so trägt man die Hälfte von a b auf die Verlängerung der Linie nach b e, zieht parallel mit der Diagonale b d die Linie e f, welche in f die Verlängerung d f schneidet, aus dem dann das um die Hälfte vergrößerte Viereck a e g f hervorgeht.

Wie umgekehrt die Verkleinerung des Viereckes erhalten wird, ist aus der Zeichnung ersichtlich.

86) Die einfachste Construktion für die schräge Projektion des Kreises besteht darin, daß man den Kreis durch ein Quadrat umschließt, dessen Diagonalen zieht, und die schräge Projektion hievon ermittelt, woraus dann acht Punkte für die Ellipse des Kreises hervorgehen.

Da bereits in dem I. Theile der II. Abtheilung dieses Werkes die schräge Projektion des Kreises und der Körper erläutert wurde, so bleibt hier nur noch Einiges über die schräge Projektion der Kugel zu erörtern.

87) Während bei der axonom. Projektion als gerade Projektion die Kugel sich als Kreis gestaltet, wird bei der schrägen Projektion ihr scheinbarer Umriß nicht mehr kreisrund bleiben, sondern als Ellipse erscheinen, ähnlich wie im perspektivischen Bilde, wo, einen einzigen Fall ausgenommen, die Kugel sich gleichfalls als Ellipse darstellt.

Wäre nun in Fig. 41 Blatt V der zur Bildfläche parallele größte Kugelkreis gegeben, dessen wagrechter Durchmesser a b und dessen senkrechter Durchmesser c d ist, so zeichne man die schräge Projektion eines wagrechten Kreises, dessen Durchmesser a b ist, und ebenso einen senkrechten größten Kreis der Kugel.

Geben wir ferners einige zu a b parallele Sehnen an, die man als Durchmesser wagrechter Kreise betrachtet und deren schräge Projektion man gleichfalls zeichnet, so wird dann aus jener Ellipse, welche die Ellipsen der bereits construirten Kreisprojektionen berührt und umschließt, die schräge Kugel-Projektion hervorgehen.

III. Abschnitt.

Das Entnehmen der Maße aus der axonometrischen Projektion und über Beleuchtung der axonometrischen Darstellung.

Entnehmen der Maße aus der axonometrischen Projektion.

88) Daß die in der Bildebene liegenden Linien und die mit ihnen Parallelen als geometrische Linien nach dem geometrischen Maßstabe, und alle in den Coordinaten-Axen liegenden, sowie die mit den Axen parallel gehenden Linien als axonometrische Linien nach ihrem zugehörigen axonometrischen Maßstabe gemessen werden, ist bereits erörtert worden.

Liegt die axonometrische Projektion eines regulären n Eckes in einer der Coordinaten-Ebenen und dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte o der Coordinaten-Axen (wie es bei Fig. 9, 10 und 11, Blatt II der Fall ist), so können die bestimmenden Maße desselben durch Ermittlung des Radius seines umschreibenden Kreises gefunden werden.

Befindet sich dieser Radius in einer der Coordinaten-Axen, so ergibt sich sein Maß ohnehin aus dem zur Axe gehörenden Maßstabe; wo dieß nicht der Fall ist, lege man einen Eckpunkt nach einem axonometrischen Maßstabe in die Bildebene z. B. wie in Fig. 9 Blatt II den Punkt b^+, wodurch sich in o b^+ der Radius des Kreises in dem y Maßstabe ergibt.

Bei der axonometrischen Kreisprojektion Fig. 13, 14 und 15 Blatt II, wo der Kreis immer in einer der Coordinaten-Ebenen liegt, läßt sich aus der großen Axe A A, B B und C C ihrer Ellipsen der geometrische Kreisdurchmesser entnehmen.

89) Bei der axonometrischen Projektion prismatischer und pyramidaler Körper, deren Axe normal auf einer der Coordinaten-Ebenen steht, können die Maße ihrer Grundflächen in eben erwähnter Weise ermittelt und die Höhe dieser Körper aus dem Maßstabe jener Coordinaten-Axe entnommen werden, mit welcher die Axe des Körpers parallel geht.

Dasselbe findet auch beim normalen Cylinder und Kegel statt, wobei das Maß des Kreisdurchmessers auch aus der in der Bildebene liegenden großen Axe der Ellipse und die Höhe aus dem Maßstabe jener Coordinaten-Axe sich ergibt, mit welcher die Axe des Körpers parallel ist.

90) Bei der Kugel ist der Halbmesser des Kreises ihrer axonometrischen Projektion gleich dem geometrischen Halbmesser derselben.

Aus der axonometrischen Projektion anderer Umdrehungskörper, deren Axe parallel mit einer Coordinaten-Axe ist, läßt sich das Größenverhältniß ermitteln, wenn, wie bei Fig. 26 Blatt V, die Projektion des Schnittes o² p . . . o'' mit einer durch die Axe des Körpers gehenden Coordinaten-Axe angegeben wird, wodurch dann die Erzeugungs-Ebene dieses Körpers Fig. 26 ᵃ jedoch nach dem X Maßstabe dadurch hervorgeht, daß man in Punkten wie o'', I', II' . . . . der axonometrischen Projektion des Körpers Normalen errichtet und die Länge o'' p, I' p . . . . nach dem x Maßstabe auf diese Normalen überträgt (nämlich in die Bildebene legt), und die hiedurch erhaltenen Endpunkte durch eine krumme Linie verbindet, wobei die Linie o² o'' in dem x Maßstabe die Umdrehungsaxe darstellt.

91) Liegt irgend eine unreguläre Flächenfigur in einer der Coordinaten-Ebenen, wobei keine Seite der Figur parallel mit einer Coordinaten-Axe ist, und sonach jede Seitenlinie derselben in einfach schiefer Lage sich darstellt, so kann die geometrische Größe aus der axonometrischen Projektion dieser Figur dadurch entnommen werden, daß man die Axen zweier Coordinaten-Ebenen in geometrische Projektion bringt und in diese die Figur geometrisch projizirt.

Wäre z. B. in Fig. 42 nach dem Systeme 1 : 1 : ½ die axonometrische Projektion eines in der x Ebene liegenden Dreieckes a b c gegeben, dessen geometrische Größe bestimmt werden soll, so bringe man die Projektion o 1, o 2, o 3 nach dem geometrischen Maßstabe auf die z Axe Fig. 42ª

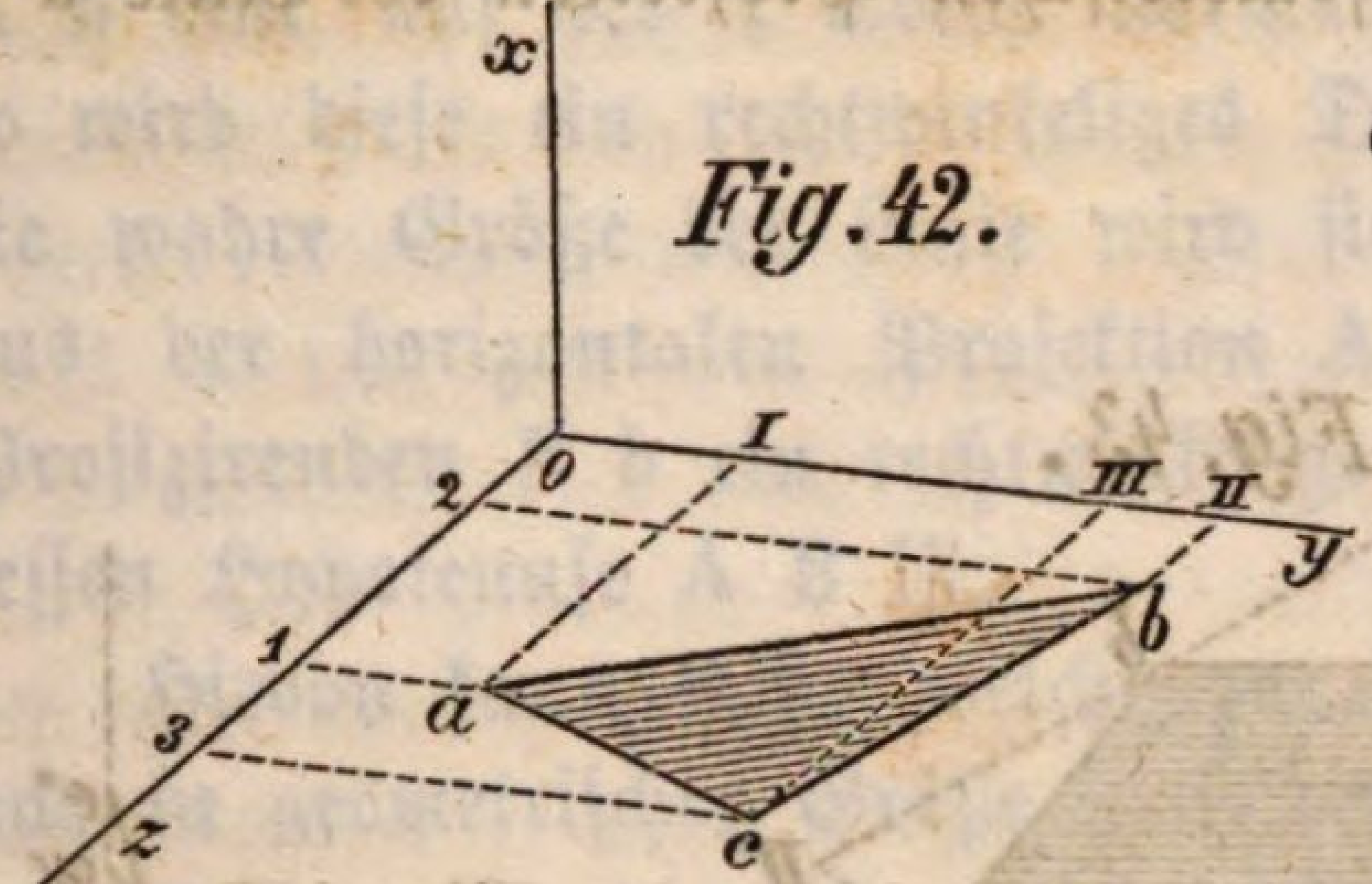


Fig. 42.

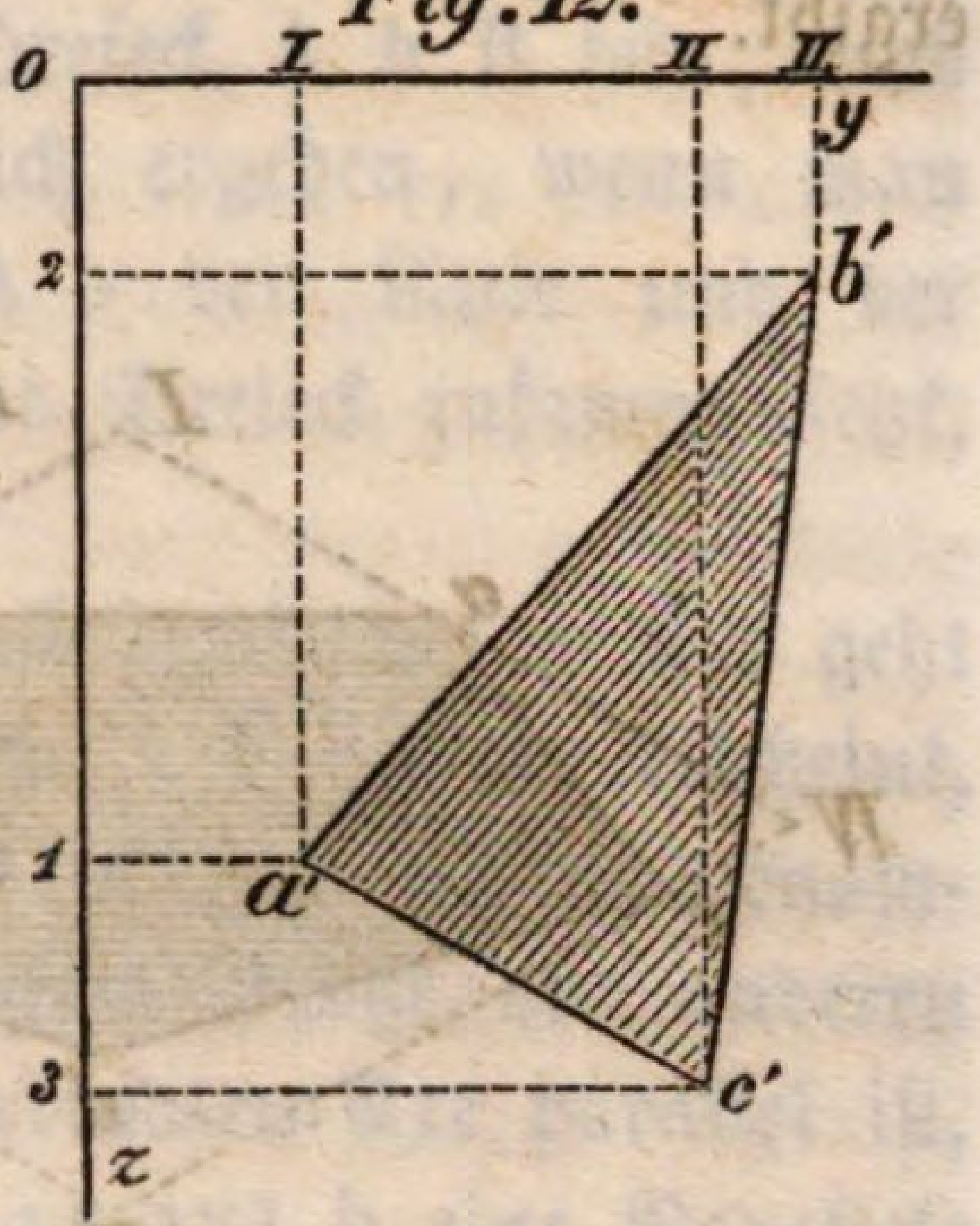


Fig. 42.ª

und ebenso o I, o II, o III auf die y Axe und ziehe aus den Punkten der z Axe Parallele mit der y Axe und aus denen der y Axe Parallele mit der z Axe, wodurch dann die Punkte a′ b′ und c′ des geometrischen Dreiecks hervorgehen.

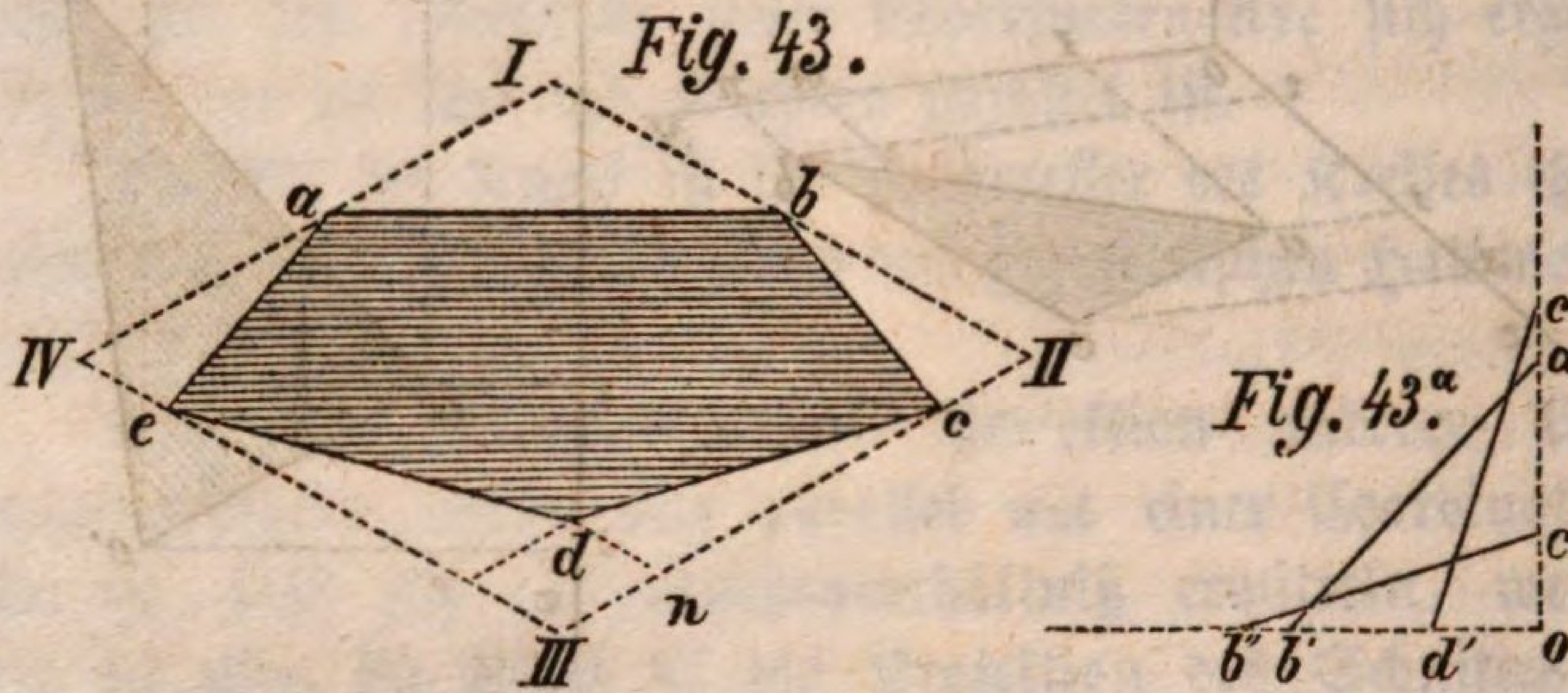
Die geometrische Größe derartiger Flächenfiguren kann auch erhalten werden, wenn man deren axonometrische Projektion durch ein Viereck umschließt, dessen Seiten parallel zweier Coordinaten-Axen sind, und dann die geometrische Projektion des Vierecks mit der Figur ermittelt.

Dieses Verfahren ist besonders da sehr anwendbar, wo sämmtliche Ecken oder doch die meisten der regulären oder unregulären Figur in die Seiten des Vierecks zu liegen kommen, wie es z. B. bei Fig. 19 und 22 Blatt III der Fall ist.

92) So können auch die einzelnen Seitenlängen der im isometrischen Vierecke liegenden Figur sehr leicht gefunden werden, wenn man die im isometrischen Vierecke liegenden

Eckpunkte der Figur in den geometrischen rechten Winkel dieses Viereckes überträgt.

Sollten z. B. die Längen des isometrischen Fünfeckes Fig. 43 bestimmt werden, so trage man I a und I b nach Fig. 43ª von o nach a' und b', woraus sich in a' b' die geometrische Länge der isometrischen Projektion der Linie a b ergibt.



Wir ersehen sonach, daß die Seite a b die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes ist, dessen Katheten die Abstände I a und I b sind, welche ebenfalls in der isometrischen Figur die wahre Größe haben.

Ebenso wird auch die Länge b'' c' Fig. 43ª der Linie b c Fig. 43 gefunden.

Um die Länge der Linie c d, deren Endpunkt d nicht im Vierecke liegt, zu erhalten, ziehe man durch d eine Parallele mit I, II und trage n c und n d gleichfalls in den rechten Winkel der Fig. 43ª über, woraus in c'' d' die gesuchte Länge hervorgeht.

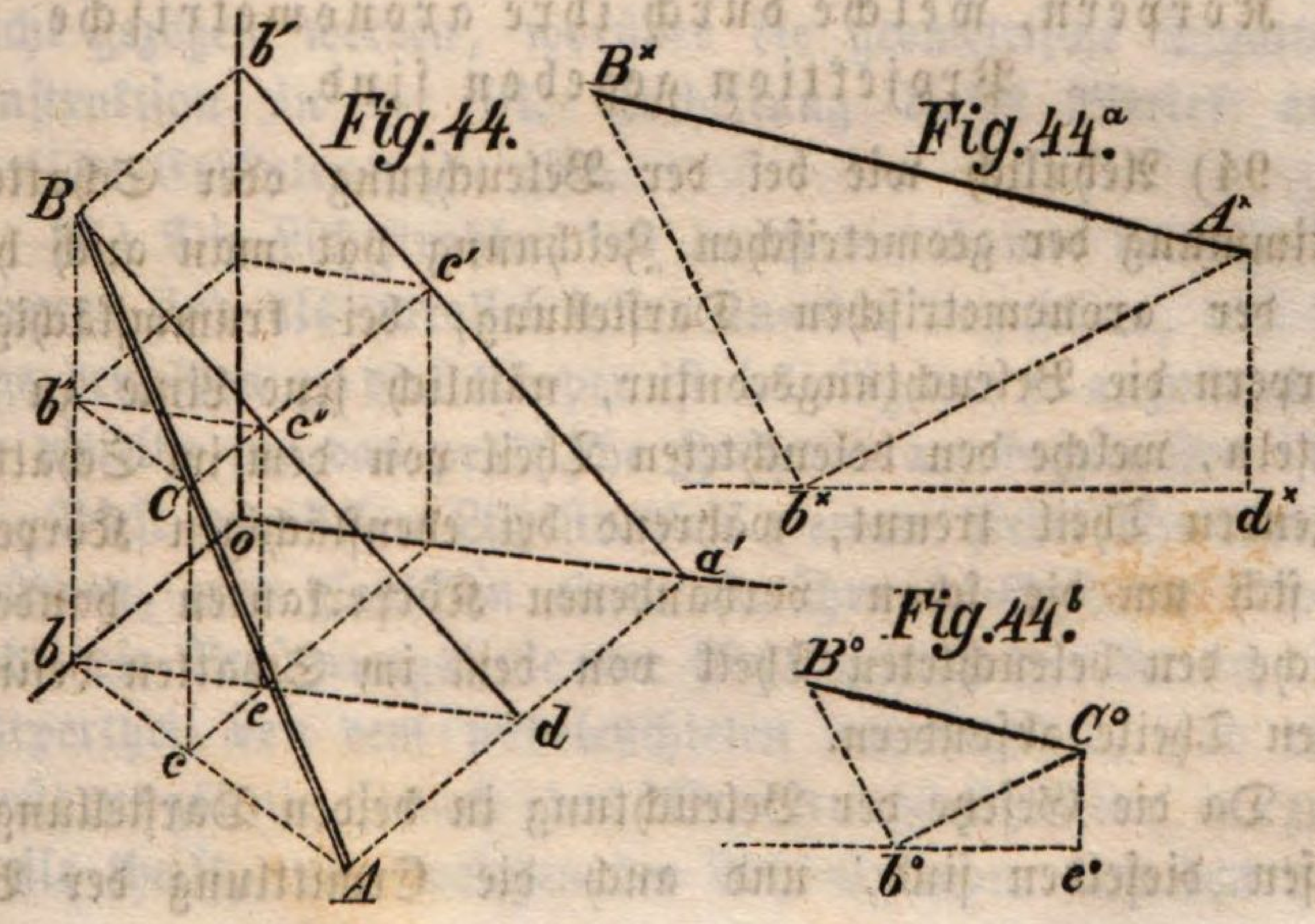
Bemerkt muß jedoch werden, daß die nach dem geometrischen Maßstabe construirte isometrische Projektion wie in Fig. 21 und 22 ihre geometrischen Größen in demselben Maßstabe gibt, während die geometrischen Größen der aus dem isometrischen Maßstabe construirten Projektion in der isometrischen Maßstabgröße erfolgen.

93) Wäre in Fig. 44 nach dem System 1 : 1 : ½ die

axonometrische Projektion einer Linie A B im Raume gegeben, welche zu keiner der Coordinaten-Ebenen eine parallele Lage, daher eine doppelt schiefe Stellung hat, so kann deren geometrische Größe in folgender Weise erhalten werden.

Der axonometrische Grundriß dieser Linie wäre A b und deren Aufriß a' b'. Denken wir uns durch die Linie A B eine auf der x Ebene normal stehende Ebene gelegt, so wird diese ein rechtwinkeliges Dreieck A b B sein, und die wahre Größe der Linie wird sich ergeben, wenn man aus der horizontalen Projektion A b der Linie und der Projizirenden B b ein rechtwinkeliges Dreieck zusammensetzt, dessen Hypotenuse A B ist.

Hievon kann B b, welche parallel mit der x Axe geht und in geometrischer Größe nach dem x Maßstabe erscheint, unmittelbar für die eine Kathete B^{+} b^{+} Fig. 44 ª abgenommen werden, während die geometrische Größe der anderen Kathete b A, welche mit keiner Coordinaten-Axe parallel ist, erst dadurch gefunden wird, daß man aus b eine Parallele mit der y Axe nach der projizirenden Linie A a' zieht, wobei letztere parallel mit der z Axe und normal der y Axe, das Dreieck b d A gibt, welches in d rechtwinkelig und wovon b d und d A geometrische Maße nach dem y und z Maßstabe haben.



b d und d A in Fig. 44ª gebracht, gibt in b+ A+ die Hypotenuse dieses Dreieckes, was die wahre Länge von b A Fig. 44 ist, die zur Bildung des Dreieckes b+ B+ A+ gebraucht wurde, und A+ B+ gibt die gesuchte geometrische Länge der Linie A B, jedoch im axonometrischen Maßstabe.

Ebenso wird auch verfahren, wenn der Durchgangspunkt A der Raumlinie in der x Ebene unbekannt, nämlich bloß das Stück B C der Linie gegeben wäre, und die Länge derselben aus der axonometrischen Projektion gefunden werden soll. Es sind nämlich die Dreiecke b e c und b d A ähnlich, ebenso die Dreiecke B b A und C c A und c C gleich c'' e.

Bildet man daher mit den Linien b e und e c als Katheten das rechtwinkelige Dreieck Fig. 44 ᵇ, dessen Hypotenuse b⁰ C⁰ die wahre Länge der axonometrischen Linie b'' C gibt, und trägt dann b'' B Fig. 44 nach b⁰ B⁰ Fig. 44 ᵇ, so ergibt sich in b⁰ B⁰ C⁰ das geometrische Dreieck von B b'' C Fig. 44, wovon die Hypotenuse B⁰ C⁰ die gesuchte Länge der Linie B C ist.

Construktion der axonometrischen Beleuchtung von Körpern, welche durch ihre axonometrische Projektion gegeben sind.

94) Aehnlich wie bei der Beleuchtung oder Schattenbestimmung der geometrischen Zeichnung hat man auch hier bei der axonometrischen Darstellung, bei krummflächigen Körpern die Beleuchtungscontur, nämlich jene Linie zu ermitteln, welche den beleuchteten Theil von dem im Schatten liegenden Theil trennt, während bei ebenflächigen Körpern es sich um die schon vorhandenen Körperkanten handelt, welche den beleuchteten Theil von dem im Schatten befindlichen Theile absondern.

Da die Gesetze der Beleuchtung in beiden Darstellungsweisen dieselben sind, und auch die Ermittlung der Be-

leuchtungscontur, sowie die Bestimmung der Schlagschatten, welche einzelne Körper auf einander werfen, auf die geometrische Schattenconstruktion gegründet ist, so muß letztere als bekannt vorausgesetzt werden.

Hiebei dürfte es dann den hiemit vertrauten Zeichnern um so mehr ein Leichtes sein, diese Beleuchtungsconturen annähernd in die axonometrische Projektion überzutragen, als dieselben mit ängstlicher Genauigkeit in keiner Darstellung festgehalten werden.

Zudem lassen sich die erwähnten Schlagschatten in die axonometrische Darstellung dadurch bringen, daß man zwei geometrische Projektionen der betreffenden Körper nach einem geeigneten axonometrischen Maßstabe zeichnet, die Schlagschatten hiebei geometrisch construirt, und die erhaltenen Grenzlinien derselben, ähnlich wie die Linien der Durchschnittsfiguren der sich durchdringenden Körper, in die axonometrische Projektion überträgt.

Uebrigens können auch die Beleuchtungs-Conturen der axonometrischen Projektion ohne Hilfe dieser geometrischen Projektion construirt werden, was nun bei nachfolgenden Aufgaben gezeigt werden soll.

Ehe wir jedoch mit der Lösung derselben beginnen, soll noch in Kürze das Wesentlichste über Beleuchtung in Betracht gezogen werden, worüber die geometrische Schatten-Construktion in der III. Abtheilung dieses Werkes ausführliche Erläuterungen gibt.

95) Die Lichtstrahlen des durch die Sonne beleuchteten Körpers sind als parallel unter einander anzusehen, und die Lage derselben zu dem Körper ist beliebig und so anzunehmen, wie dieselbe für das praktische Zeichnen am bequemsten ist.

Diese parallelen Lichtstrahlen werden hiebei den Körper berühren, und gleichsam einen Berührungs-Cylinder bilden, wobei die Berührungslinie der Lichtstrahlen den beleuchteten Körpertheil von dem unbeleuchteten unterscheidet, und diese Berührungslinie sonach den Berührungs-Cylinder in zwei Theile theilt, von welchen der Licht-Cylinder von den vom

leuchtenden Körper ausgehenden Strahlen durchstrichen wird, der Schatten-Cylinder aber nicht.

Dieser Schatten-Cylinder kann daher auch auf einem zweiten Körper eine unbeleuchtete Stelle (den Schlagschatten) erzeugen.

Die Beleuchtung von Ebenen ist von dem Winkel abhängig, den die parallelen Lichtstrahlen mit der Ebene bilden, und die Beleuchtung wird um so stärker sein, je größer dieser Winkel ist.

So wird auch jeder Punkt einer krummen Fläche dieselbe Beleuchtung haben wie die Berührungsebene dieses Punktes. Zudem werden die Punkte beleuchteter Körper um so schwächer beleuchtet erscheinen, je entfernter sie dem Beschauer sind, und die beschatteten Theile um so dunkler erscheinen, je näher sie demselben liegen.

Die Richtung der Lichtstrahlen wird, obgleich dieselbe beliebig anzunehmen ist, für die Beleuchtung technischer Gegenstände gewöhnlich wie bei der geometrischen Zeichnung angenommen, wozu man sich einen Cubus denkt, dessen drei Begrenzungsebenen mit den Coordinaten-Ebenen zusammenlaufen, wo dann dessen Diagonale L o uns die Richtung des Lichtstrahles zu den Coordinaten-Ebenen vorstellt, und wobei angenommen wird, daß die Sonne oberhalb der x Ebene sich befindet.

Für Systeme, bei welchen die y Axe größer als die z Axe oder gleich dieser sich darstellt, kann der Cubus in dem x $\overline{y}$ z Quadranten, Fig. 45 Blatt VI gedacht werden, und für solche, bei welchen die y Axe kleiner als die z Axe sich projizirt, mag derselbe in dem x y z Quadranten sich befinden Fig. 45 [a].

Hiebei wäre in beiden Fällen l′ der axonometrische Grundriß, l″ der Aufriß und l‴ die Seitenansicht des Lichtstrahles L.

96) **26. Aufgabe.** Fig. 46 Blatt VI.

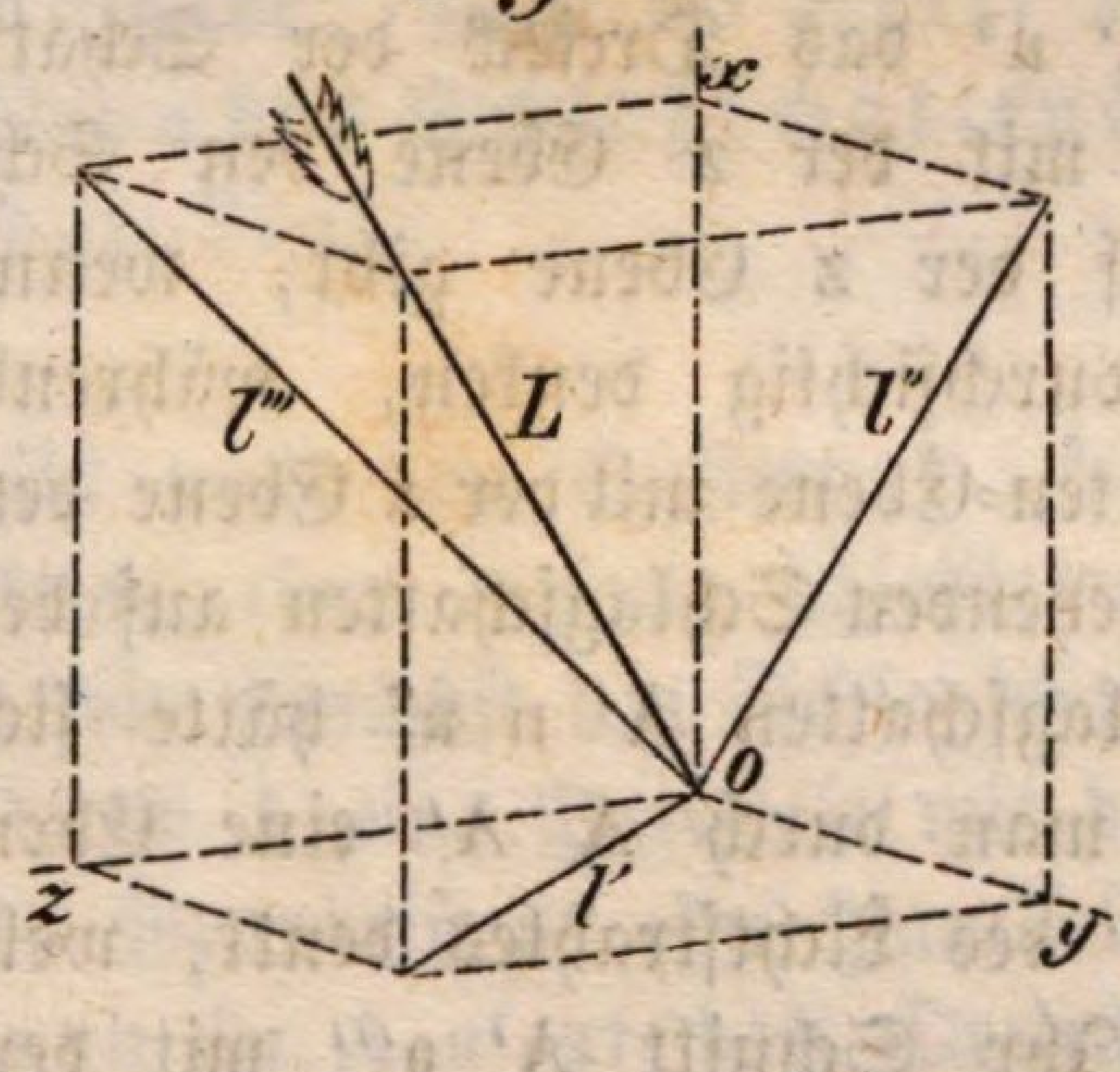
Die axonometrische Projektion einer auf der x Ebene normalstehenden Linie ist gegeben, es soll ihr Schlagschatten ermittelt werden.

Lösung.

Es sei A A′ die axonometrische Projektion der auf der x Ebene normalen Linie von 18″ Länge, 10″ von der z Ebene und 12″ von der y Ebene entfernt, und nach dem Systeme 1 : 0,9 : 0,5 dargestellt.

Denken wir uns durch diese Linie eine Ebene gelegt, parallel den Lichtstrahlen, und geben A′ a^3 parallel mit l′ und A a^3 parallel mit L an, so wird das Dreieck A A′ a^3 diese Schattenebene sein, deren axonometrischer Schnitt A′ a^3 mit der x Ebene den Schlagschatten der Linie auf der x Ebene gibt, wenn man die z Ebene als durchsichtig annimmt.

Fig. 45.ª



Gibt man ferners auch den Schnitt n a^2 der Schattenebene A A′ a^3 mit der z Ebene an, welcher parallel der x Axe ist, so erhalten wir in A′ n a^2 den auf die x und z Ebene fallenden Schatten der Linie A A′.

Ist der axonometrische Aufriß der Linie in a a′ gezeichnet, so kann dieser Schlagschatten auch dadurch erhalten werden, wenn mit dem Aufriß l″ des Lichtstrahles eine Parallele durch a geführt, und aus dem Punkte p, p a^3 parallel der z Axe gezogen wird.

Ebenso kann auch mit Benützung der Seitenansicht l‴ des Lichtstrahles der Punkt a^3 und a^2 ermittelt werden.

Denken wir uns nämlich durch A A' eine Ebene parallel mit l''' gelegt, so wird diese das rechtwinkelige Dreieck A A' a''' sein, dessen Schnittpunkt a''' mit der verlängerten horizontalen Projektion A' a' den Schattenpunkt a^3, und dessen Schnittpunkt a'' mit der vertikalen Projektion a a', den Schattenpunkt a^2 bestimmt.

97) **27. Aufgabe.** Fig. 47 Blatt VI.

Der Schlagschatten einer auf der z Ebene normalstehenden Linie soll construirt werden.

Lösung.

In Fig. 47 sei A A' die auf der z Ebene normale Linie von 19'' Länge, 12'' von der x Ebene und 9'' von der y Ebene entfernt, und nach dem Systeme 1 : 1 : ½ dargestellt.

Zieht man durch A und A' eine Parallele mit L und l'', so ist A A' a^3 das Dreieck der Schattenebene, deren Schnitt A' a^3 mit der z Ebene den Schlagschatten der Linie A A' auf der z Ebene gibt, wenn wir uns die x Ebene als durchsichtig denken, während der Schnitt n a^2 jener Schatten-Ebene mit der x Ebene den mit der Linie A A' parallel gehenden Schlagschatten auf der x Ebene gibt.

Dieser Schlagschatten A' n a^2 hätte sich auch dadurch ergeben, wenn man durch A A' eine Ebene parallel der Seitenansicht l''' des Lichtstrahles denkt, welche das Dreieck A A' a''' ist. Ihr Schnitt A' a''' mit der z Ebene gibt dann durch a''' den unterhalb der x Ebene fallenden Schattenpunkt a^3 der z Ebene, und ihr Schnitt a'' a' mit der x Ebene bestimmt den auf diese Ebene fallenden Schattenpunkt a^2.

Ebenso ließen sich diese Schattenpunkte a^2 und a^3 durch das Ziehen von Parallelen mit dem Grund- und Aufriß l' l'' des Lichtstrahles L ermitteln.

98) **28. Aufgabe.** Fig. 48. Blatt VI.

Construktion des Schlagschattens einer einfach schiefstehenden Linie.

Lösung.

Fig. 48 enthält die axonometrische Projektion einer einfach schiefstehenden Linie A B nach dem Systeme 1 : 0,9 : 0,5.

Dieselbe kann in einer mit der y Ebene parallel liegenden Ebene gedacht werden, deren Dreieckseite A a′, 16″ und B a′, 18″ mißt.

Ziehen wir durch a′ eine Parallele mit der Seitenansicht l‴ des Lichtstrahles, so wird diese die Linie A B in N treffen; durch den Punkt N eine zweite Parallele mit L geführt, bestimmt diese in n den Brechungspunkt auf der y Axe des Schlagschattens A n B dieser Linie A. B.

Ebenso hätte auch mittelst des Grund- und Aufrisses l′ l″ oder mittelst des Grundrisses und der Seitenansicht l′ l‴ des Lichtstrahles der auf die x Ebene fallende Schlagschatten B a⁺ bestimmt werden können, wobei die z Ebene als durchsichtig gedacht wird.

99) **29. Aufgabe.** Fig. 49 Blatt VI.

Construktion des Schlagschattens einer doppelt schief stehenden Linie.

Lösung.

Fig. 49 gibt nach dem System 1 : 1 : ½ die axonometrische Projektion einer doppelt schiefstehenden Linie A B.

Bestimmen wir zunächst den Schlagschatten des Punktes A, indem wir durch A eine Parallele mit dem Lichtstrahle L und durch seinen Grundriß a′ eine Parallele mit l′ führen, wodurch sich dann in A a′ a⁺ das Dreieck einer auf der x Ebene normalstehenden Ebene ergibt, deren Schnitt a′ a⁺ mit der x Ebene in a⁺ den Schlagschatten des Punktes A gibt, der sich hinter der z Ebene auf der x Ebene absetzt.

Der mit der x Axe parallele Schnitt p a² der Ebene A a′ a⁺ bestimmt in a² den Schlagschatten des Punktes A auf der z Ebene, und B n a² wäre der gesuchte Schlagschatten der Linie A B.

100) **30. Aufgabe.** Fig. 50 Blatt VI.

Die axonometrische Projektion eines auf der x Ebene normalstehenden Prismas ist nach dem Systeme 1 : 1 : ½ gegeben; es soll dessen Schlagschatten bestimmt werden.

Lösung.

Um den Schlagschatten dieses gegebenen regulären achtseitigen Prismas zu erhalten, suche man zunächst die Berührungslinien der Lichtstrahlen zu ermitteln, welche hier Kanten des Körpers sind, wozu man an a' und e' parallele Linien mit l' zieht, und dieselben als axonometrische Schnitte von Lichtebenen denkt, welche die Kanten a a' und e e' berühren.

Der Schlagschatten des Körpers, welcher hier in die x und z Ebene fällt, ergibt sich, wenn man wie bei Fig. 46 zuerst die Schlagschatten der Kanten a a' und e e' sucht, und dann die Schlagschatten der Eckpunkte b, c, d der oberen Grundebene ebenso bestimmt.

101) 31. Aufgabe. Fig. 51 Blatt VI.

Construktion des Körper- und Schlagschattens eines auf der z Ebene normal stehenden Cylinders.

Lösung.

Um die axonometrische Projektion a a'' und b b'' der beiden Cylinderseiten, welche von den Lichtstrahlen berührt werden, zu erhalten, ziehe man an die Ellipse, welche die in der z Ebene liegende Grundebene des Cylinders darstellt, zwei Tangenten parallel mit l''.

Der geradlinige Schlagschatten dieser Seiten ergibt sich durch die an a'' und b'' geführten Parallelen der Lichtprojektion l'', und durch die Ermittlung der Schlagschatten ihrer Punkte a und b.

Letztere zu bestimmen, lege man durch a und a' eine Parallele mit L und l', woraus in a^0 der auf die z Ebene fallende Schatten des Punktes a hervorgeht. Der Schattenpunkt b^+ des in der y Axe sich brechenden geradlinigen Schlagschattens b'' n b^+ wird ebenso bestimmt.

Der Schlagschatten b^+ c^+ d^+ p a'', welcher von dem Kreisbogen a d b der vorderen sichtbaren Cylinderbasis abgesetzt wird, kann dadurch gefunden werden, wenn man die Schlagschatten der Punkte c d e a des Kreisbogens in der

x Ebene in derselben Weise wie die Punkte a^+ und b^+ bestimmt.

Der Punkt a^+ hinter der z Ebene liegend, muß deshalb ermittelt werden, um den Brechungspunkt p für den auf die z Ebene fallenden Schatten p a^0 zu erhalten.

Die hellste Seite des Cylinders ergibt sich, wenn man die Linie h m parallel mit l'' zieht. Da diese jedoch an die äußere sichtbare Cylinderseite zu liegen kommt, wodurch in der Zeichnung die scheinbare Rundung des Cylinders beeinträchtigt würde, so rückt man gewöhnlich diese Lichtseite etwas weiter herein.

102) **32. Aufgabe.** Fig. 52 Blatt VI.

Der Körperschatten und Schlagschatten eines auf der x Ebene normalen Kegels soll construirt werden.

Lösung.

Die Basis dieses nach dem Systeme **1 : 1 : ½** dargestellten Kegels befindet sich in der x Ebene und dessen Axe S m normal auf dieser Ebene.

Die axonometrische Projektion h S der hellsten Seite des Kegels ergibt sich, wenn man durch m die Linie m h parallel mit l' zieht.

Die axonometrische Projektion a S und b S der Seiten des Kegels, welche von den Lichtstrahlen berührt werden, ergeben sich, wenn man den axonometrischen Schlagschatten der Kegelspitze S ermittelt und aus dem Schattenpunkte S^+ an die Kegelbasis die Tangenten s^+ a und s^+ b führt.

Hiedurch ergibt sich zugleich aus den Linien s^+ a und s^+ b der Schlagschatten des Kegels in der x Ebene, der sich jedoch in der y Axe bricht und sonach in der z Ebene in p p S^0 fortsetzt.

103) **33. Aufgabe.** Fig. 53 Blatt VI.

Die axonometrische Projektion eines auf der x Ebene normal stehenden umgekehrten Kegels ist gegeben, dessen Körper- und Schlagschatten construirt werden soll.

Lösung.

Die Basis dieses nach dem System 1 : 1 : ½ dargestellten Kegels befindet sich oberhalb und parallel der x Ebene, wobei die Spitze des Kegels diese Ebene berührt.

Um hier die axonometrische Projektion S a und S b der schattenwerfenden Kegelseiten zu erhalten, denke man durch die Kegelbasis eine Ebene parallel der x Ebene gelegt, und bestimme auf jener Ebene die axonometrische Projektion F des Punktes, in welchem die durch die Kegelspitze gehende und mit dem Lichtstrahle parallele Linie S F jene Ebene schneidet, indem man m F parallel l′ und S F parallel mit L zieht.

Werden dann von F aus Tangenten an die Kegelbasis geführt, so bestimmen ihre Berührungspunkte a und b jene Seiten S a und S b, während S h die am hellsten beleuchtete Kegelseite ist.

Würde bei dieser Stellung des Kegels seine Axe m S so angenommen, daß der Punkt F in den Punkt h kommt, so fällt die durch die Linie S h sich darstellende Seite des Kegels mit einem Lichtstrahle zusammen, während alle übrigen Seiten desselben nicht von den Lichtstrahlen getroffen werden und dann diese Kegelseiten mit der Grundebene denselben Winkel bilden, den die Lichtstrahlen mit der x Ebene einschließen; alle Seiten von noch niedrigeren Kegeln werden dagegen von den Lichtstrahlen gar nicht getroffen werden.

Der S c h l a g s c h a t t e n des Kegels in der x Ebene, wobei die z Ebene als durchsichtig gedacht wird, kann erhalten werden, wenn man a^+ und b^+ und noch einige andere Schattenpunkte des schattenwerfenden Theiles a c b der Kegelbasis in der x Ebene wie bei Fig. 50 construirt und a^+ b^+ mit S durch gerade Linien verbindet; oder wenn man die Ellipse dieses Schlagschattens ermittelt, indem man den Schatten m^+ des Mittelpunktes m construirt und in m^+ die Ellipse der Kegelbasis überträgt und an jene Ellipse aus S die geradlinigen Schlagschattengrenzen zieht.

Für die Ermittlung des auf die x und z Ebene fallenden

Schlagschattens genügen für den geradlinigen Schatten S p a^0 und S p b^0 die Schattenpunkte a^+ b^+ und a^0 b^0.

Der Ellipsentheil des auf die z Ebene treffenden Schlagschattens des Kreisbogens a c b der Kegelbasis ergibt sich dann, wenn man den Schatten mehrerer Punkte dieses Kreisbogens in der z Ebene construirt.

104) **34. Aufgabe.** Fig. 54 Blatt VI.

Die isometrische Projektion eines auf der x Ebene normalstehenden hohlen Cylinders ist gegeben; es soll dessen innerer Schlagschatten construirt werden.

Lösung.

Zieht man an die Kantenpunkte a a′ des Cylinders eine Parallele mit L l′, so hat man in a″ den axonometrischen Grundriß der Seite der hohlen Cylinderfläche, in welcher die die Kante a a′ berührende Lichtebene die erwähnte Fläche schneidet und a″ a^3 wäre die Projektion dieser Seite.

Denken wir uns an die innere Basis des hohlen Cylinders eine Tangente parallel l′ und legen an deren Berührungspunkte b′ eine Cylinderseite, so wird diese in b den Anfangspunkt der Schattencurve der hohlen Cylinderfläche bestimmen.

Wird ferners durch die Cylinderseite c c′, welche zwischen a und b angenommen wurde, eine Ebene parallel mit L l′ gedacht, so bestimmt ihr Schnitt c″ c^3 mit der Cylinderfläche den Punkt c^3 dieser Schattencurve.

Die am hellsten beleuchtete Seite der hohlen Cylinderfläche ergibt sich durch die Lichtebene, welche man parallel mit L l′ durch m gelegt denkt.

105) **35. Aufgabe.** Fig. 55. Blatt VI.

Schattenbestimmung eines mit einem Prisma verbundenen Cylinders.

Lösung.

Für die Schattenbestimmung der nach dem Systeme **1 : 1 :** $^1/_2$ dargestellten Körperverbindung, welche aus einem normalen Cylinder besteht, über welchen concentrisch ein kür=

zeres sechsseitiges Prisma geschoben ist, hat man den axonometrischen Grundriß derselben wie in Fig. 55 nöthig.

An den Grundrißpunkt d' des Prismas eine Parallele mit l^+ geführt, zeigt uns, daß seine Seitenfläche d e in Schatten liegt.

Die axonometrische Projektion der Cylinderseite a a', welche von den Lichtstrahlen berührt wird, ergibt sich aus dem Berührungspunkte a' einer Tangente, welche parallel mit l^+ an die Cylinderbasis gezogen wird und die am hellsten beleuchtete Cylinderseite h h' geht durch die Gerade h' m hervor, welche parallel mit l^+ ist.

Um den Schlagschatten, welchen der obere Cylindertheil auf die obere Grundebene des Prismas absetzt, zu erhalten, bestimme man den Schatten a^+ des Punktes a, wodurch sich in a'' a^+ der Schlagschatten der Cylinderseite a a'' ergibt.

Um ferners den Schlagschatten zu finden, der von dem Prisma auf dem untern Cylindertheile abgesetzt wird, ziehe man im Grundrisse aus dem Eckpunkte c' der untern Kante b' c' eine Parallele mit l^+, welche den Cylinder in n schneidet und lege gleichfalls durch c eine Parallele mit L^+, so wird diese die aus n errichtete Cylinderseite in C treffen, und sonach in diesem Punkte den auf die Cylinderfläche abgesetzten Schatten des Eckpunktes c bestimmen.

So können nun auch auf der Kante b c, sowie auf der Kante c d von g bis k beliebige Punkte angenommen und deren Schatten bestimmt werden.

106) **36. Aufgabe.** Fig. 56 Blatt VI.

Construktion des Schattens eines mit einem Cylinder verbundenen Kegels.

Lösung.

Bei dieser nach dem Systeme 1 : 1 : ½ axonometrisch dargestellten Körperverbindung ist die Basis des Cylinders und Kegels gleich groß und die Axenlinie dieser Körper mit der x Axe zusammenfallend angenommen.

Die Ermittlung des Schattens erfordert den axonometrischen Grundriß der Körper wie in Fig. 56ª.

Ist in h h′ die axonometrische Projektion der hellsten, sowie die a a der sichtbaren schattenwerfenden Cylinderseite wie in Fig. 55 bestimmt und ebenso wie in Fig. 52 die axonometrische Projektion c′ S der hellsten und die S b′ der schattenwerfenden Seite des Kegels und dessen Schlagschatten in der x Ebene angegeben, so suche man den Schlagschatten des Cylinders in der x Ebene zu ermitteln, indem man die Schatten M_+ und M^+ der beiden Mittelpunkte M′ M der oberen und unteren Cylinderbasis construirt und in M_+ und M^+ die Ellipse der Cylinderbasis überträgt.

Der geradlinige Schlagschatten a_+ a^+ der schattenwerfenden Cylinderseite a a ergibt sich durch die aus a′ und a a geführten Parallelen mit l′ und L.

Um ferners den Schlagschatten zu erhalten, welchen die untere Cylinderbasis auf die beleuchtete Kegelfläche wirft, construire man zunächst die axonometrische Projektion C des Punktes, welcher den Schlagschatten der hellsten Seite c′ S des Kegels bildet; derselbe wird hier erhalten, wenn man von h′ eine Linie parallel mit L bis zum Durchschnitte mit c′ S zieht.

Der Mittelpunkt m des Kegelkreises, auf dessen Peripherie dieser Punkt C liegt, ergibt sich durch die Linie C m, welche man parallel mit l′ zieht.

Der in der schattenwerfenden Seite b′ S liegende Schattenpunkt D ergibt sich, wenn aus dem Durchschnittspunkte d^+ der Schlagschattengrenze b′ S^+ des Kegels und der des untern Cylinderkreises eine Parallele mit L bis zum Durchschnitte mit S b′ gezogen wird.

Auch hier ergibt sich in n der Mittelpunkt des Kegelkreises, in dessen Peripherie der Punkt D liegt, durch D n, welche parallel mit M″ b′ geführt wird.

Alle übrigen Schlagschattenpunkte, welche von der untern Cylinderbasis auf die Kegelfläche geworfen werden, befinden sich auf Kreis-Peripherien des Kegels, deren axonometrische Mittelpunkte zwischen den Punkten m und n liegen.

Denke man sich z. B. durch p eine Ebene parallel der x Ebene gelegt und construire in Fig. 56ª den axonometrischen Grundriß des Kreises, in welchem die gedachte Ebene den Kegel schneidet und gebe ebenso den Grundkreis des Schatten-Cylinders an, dessen Mittelpunkt e' sich durch die mit L und l' geführte Parallele M' e und p e in Fig. 56 ergibt, so wird obige Ebene den Grundkreis des Schatten-Cylinders, der hier ein schiefer Cylinder vom Halbmesser des gegebenen Cylinders ist, bei i und g' schneiden und diese Durchschnittspunkte als Schlagschattenpunkte des axonometrischen Grundrisses sich in der gedachten Ebene befinden.

Die axonometrische Projektion des sichtbaren Punktes G ergibt sich, wenn man p f parallel der y Axe zieht, den Grundrißpunkt g'' nach p f in g projizirt, und ebenso den Grundriß g' des Schattenpunktes G auf die mit der z Axe parallele Linie g G überträgt.

107) **37. Aufgabe.** Fig. 57 Blatt VI.

Die Beleuchtungscontur und der Schlagschatten einer nach dem Systeme 1 : 1 : ½ dargestellten Kugel soll ermittelt werden.

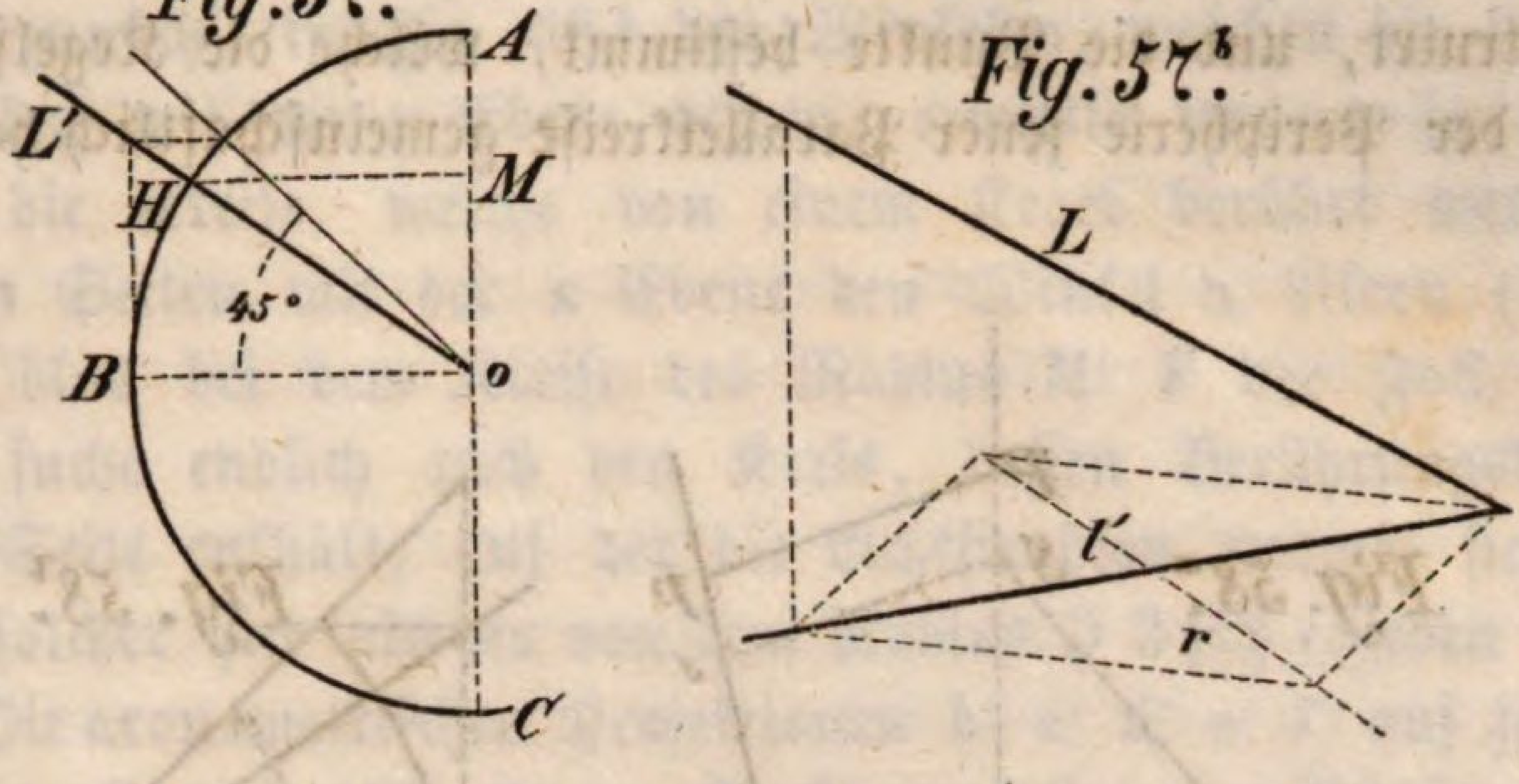
Lösung.

Da bei der Kugel die Berührungslinie der Lichtstrahlen ein größter Kreis der Kugel wird, welcher normal auf den Lichtstrahlen steht und da der hellste Kugelpunkt ein Endpunkt des Radius ist, welcher parallel den Lichtstrahlen liegt, so ergibt sich die axonometrische Projektion der Beleuchtungscontur durch Ermittlung der großen und kleinen Axe ihrer Ellipse.

Die große Axe a a wird erhalten, wenn man durch o eine Linie parallel L zieht, und aus o eine Normale auf dieser Linie errichtet.

Der Punkt b'' der kleineren Axe ergibt sich durch die axonometrische Projektion eines mit der x Ebene parallelen größten Kugelkreises, aus dessen Mittelpunkt eine Parallele mit der Linie r geführt wird, insoferne r die axonometrische Projektion einer auf l' rechtwinkelig stehenden Linie ist.

Fig. 57.ᵃ Fig. 57.ᵇ



Um den hellsten Kugelpunkt zu ermitteln, construire man in Fig. 57ᵃ die Lichtprojektion L', nämlich den Winkel, welchen die Lichtstrahlen mit der x Ebene bilden.

Denken wir uns A, B, C Fig. 57ᵃ als Erzeugungsebene der Kugel und aus dem Mittelpunkt o eine Parallele mit L' geführt, so gibt diese in H M den Radius eines Kugelkreises an, in dessen Peripherie der hellste Kugelpunkt liegt.

Construirt man in Fig. 57 die axonometrische Projektion dieses Kreises und legt durch seinen Mittelpunkt m eine Parallele mit l', so bestimmt diese in h den hellsten Kugelpunkt.

Der Schlagschatten, welcher von der Beleuchtungscontur der Kugel auf die x Ebene abgesetzt wird, kann erhalten werden, indem man den Schatten o+ des Kugelmittelpunktes o auf der x Ebene bestimmt, durch diesen eine Parallele mit r und aus b' b' Parallelen mit l' zieht, und ebenso aus a, a Parallelen mit L führt, woraus sich in a+ a+ und b+ b+ die Punkte für die Ellipse dieses Schlagschattens ergeben.

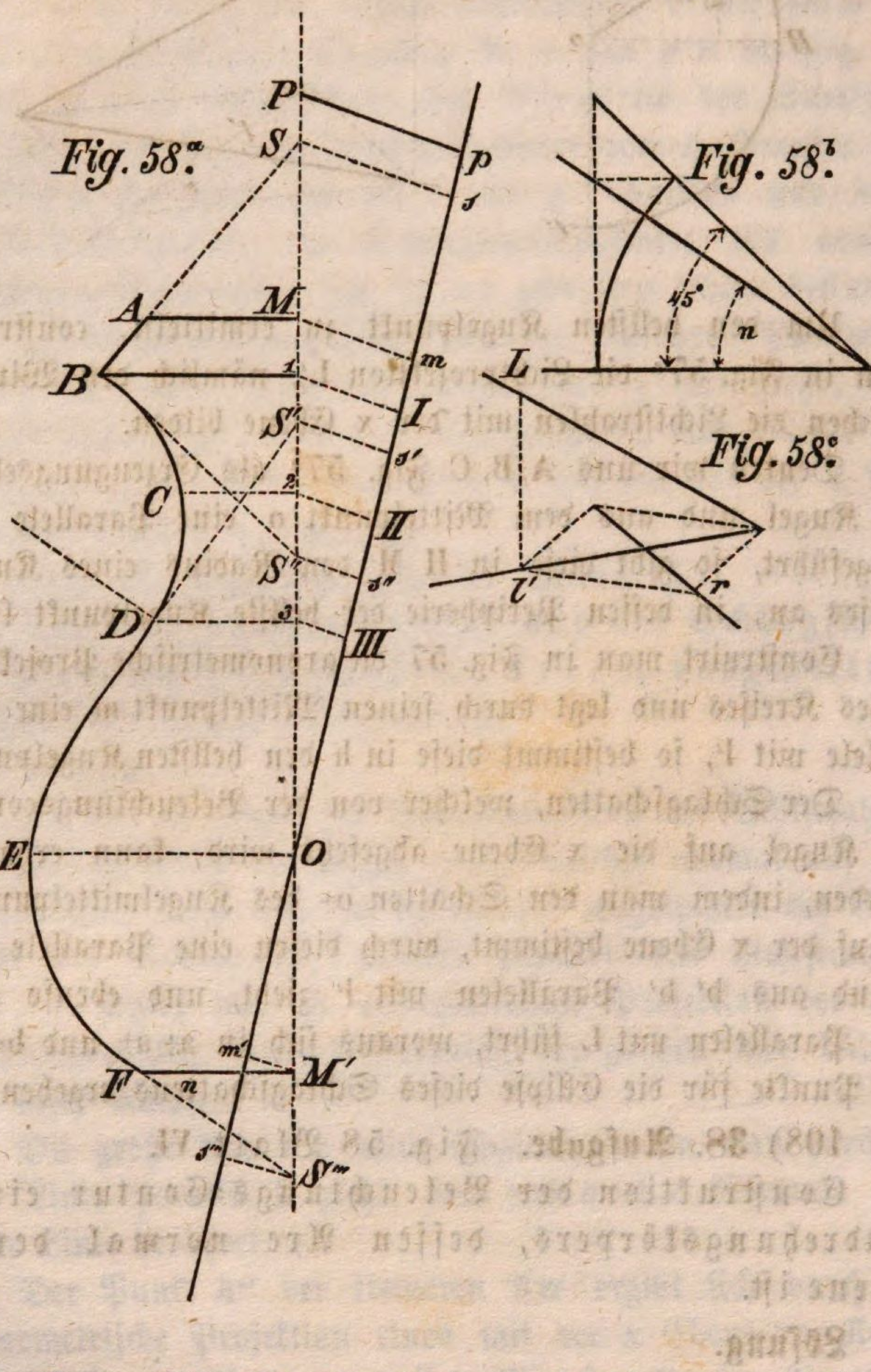
108) **38. Aufgabe.** Fig. 58 Blatt VI.

Construktion der Beleuchtungs-Contur eines Umdrehungskörpers, dessen Axe normal der x Ebene ist.

Lösung.

Die Punkte der Berührungslinie der Lichtstrahlen eines Umdrehungskörpers können dadurch erhalten werden, daß man mehrere Parallelkreise der Umdrehungsfläche annimmt, und

hiefür Berührungskegel denkt, deren schattenwerfende Seite construirt, und die Punkte bestimmt, welche die Kegelseiten mit der Peripherie jener Parallelkreise gemeinschaftlich haben.



Ist in Fig. 58ª die Linie S M′ die geometrisch gegebene Umdrehungsaxe und M A B C F M′ die Erzeugungsebene des in Fig. 58 axonometrisch nach dem Systeme

1 : 1 : ½ dargestellten Umdrehungskörpers, so construire man zunächst in Fig. 58^b den Winkel n, welchen die Lichtstrahlen mit der x Ebene bilden, ermittle ferners in Fig. 58^a die Kreise, welche von einem Kegel berührt werden, dessen Seiten mit der x Ebene den Winkel n bilden (was hier blos bei dem Kreise des Radius M′ F der Fall ist), und suche endlich auch den Kreis, dessen Berührungskegel eine Seite enthält, auf der die Lichtstrahlen normal stehen, wie solcher hier als der von dem Radius D 3 sich ergeben hat.

Die axonometrischen Projektionen b′ c′ d′ e′ f′ auf jenen Kreisen liegender Punkte der Berührungslinie der Lichtstrahlen ergeben sich dann in folgender Weise.

Die schattenwerfende Seite i S des oberen Kegelstückes dieses Körpers ergibt sich, indem man die Linie I t parallel mit l′, und S t parallel L bis zum Durchschnitt t mit letzterer Linie, und von t die Tangente t i zieht.

Die Kreise von den Halbmessern O E und II C werden von Cylinderflächen berührt; es ergibt sich daher die axonometrische Projektion in Fig. 58 des Punktes e′, welcher von dem Lichtstrahle berührt wird und dem Kreise des Radius O E angehört, indem man o e′ parallel r zieht, wogegen der dem zweiten Kreise angehörende Punkt c′ sich ergibt, wenn man II c′ parallel r und c′ n parallel der Linie e′ n′ zieht.

Die axonometrische Projektion d′ des dem Kreise vom Halbmesser III D zugehörenden Punktes geht aus dem Berührungspunkte der von v an die den Kreis darstellende Ellipse gezogenen Tangenten hervor, während v der Durchschnittspunkt der Linien III v und s′ v ist, von welchen die erstere parallel l′, die letztere parallel L ist.

Aehnlich ergibt sich auch der Punkt b′ durch die an den Kreis des Radius B I aus u gezogene Tangente, und der Punkt u aus dem Durchschnitte der Linien I u und s″ u, welche parallel mit l′ und L aus l und s″ geführt werden.

Ferners kann auch der dem Kreise vom Halbmesser F M′ zugehörende Punkt f′ dadurch erhalten werden, daß

man m f' parallel l' bis zum Durchschnitte mit der den Kreis darstellenden Ellipse zieht, da f' S''' als gedachte Kegelseite dieses Kreises mit dem Lichtstrahle L zusammen fällt (siehe §. 103).

Den hellsten Punkt dieses Umdrehungskörpers, dessen axonometrische Projektion h ist, enthält der Kreis vom Halbmesser III D.

Die Construktion des Schlagschattens, welchen dieser Umdrehungskörper auf die Coordinaten-Ebene oder auf andere Körper wirft, besteht darin, daß man von den construirten Punkten der Berührungslinie der Lichtstrahlen Linien parallel der Lichtstrahlen zieht, und die Punkte construirt, in welchen dieselben die Coordinaten-Ebenen oder jene Körper schneiden, während aber der Schlagschatten, welchen ein anderer Körper auf den Umdrehungskörper werfen würde, in derselben Weise wie bei Fig. 56 construirt wird.

Perspective.

Elementar-Unterricht

im

Linear-Zeichnen

für

technische Schulen und zum Selbstunterrichte

von

Heinrich Weishaupt,

königl. Professor und techn. Vorstand sämmtlicher städtischen feier- und werktägigen Zeichnungsschulen Münchens.

II. Theil der IV. Abtheilung.

Perspective.

München, 1868.

Carl Merhoff's Verlag.